Premières C, E

Eric Simo, Editeur

MATHÉMATIQUES

Probatoire – Sujets Corrigés

Jean-Pierre Kengne, Emmanuel Simo

Avec 15 schémas d’illustration
et 19 exercices corrigés

Eric Simo, Msc.-Ing. TU-BS (Editeur)
An den Äckern 2
31224 Peine
Allemagne
kuateric@gmail.com

Mathématiques Premières C, E. Nouvelle Edition

Auteurs: Jean-Pierre Kengne, Maître Es Sciences; Emmanuel Simo, Maître Es Sciences (Cameroun)

Contributions: E. S. (Allemagne); F. W., J. T. (Cameroun); E. A. F. (Italie, R-U); T. v. P. (Pays-Bas); A. Z., L. S., I. D. (Ukraine); D. R., P. B. (Italie); M. B. (Zimbabwe); F. K. (Pakistan); A. K. (Russie); R. K. (Maroc)

Conception graphique des couvertures: R. A. (Bangladesh)
Thème artistique des couvertures 2017: Intelligence Artificielle

ISBN 978-3-947242-05-4 • Maison d'Edition SIMO • Bandjoun Brunswick Belfast Rotterdam • 2017

Site Internet: www.simo.education

Avant-propos

Vous avez choisi ce livre parce que vous avez un objectif à atteindre. C'est un instrument réellement utile et efficace pour aider les apprenants des **classes de premières scientifiques et techniques**, quel que soit leur niveau, à améliorer leurs performances en **mathématiques**.

Inspirée de la pédagogie nouvelle, la conception de ce livre se fonde sur deux outils à savoir : le *cours* et les *exercices corrigés*.

Le cours a été conçu selon le projet pédagogique suivant :

- Une présentation claire parfaitement lisible qui permet de faciliter le travail de l'apprenant.
- Un cours bien structuré allant à l'essentiel. Conforme aux contenus du programme, ce cours prépare aux compétences exigibles, mais en se limitant strictement aux notions qui doivent être étudiées. Nous l'avons donc voulu bref.

Les exercices résolus et commentés, soutenus par des *méthodes de résolution* permettent à l'apprenant d'acquérir l'esprit scientifique et les principaux modes de raisonnement qu'il devra savoir développer. C'est une bonne façon d'aborder les nombreux exercices de chaque chapitre. Dans le souci d'efficacité qui a fait le succès de cette édition, nous attirons votre attention dans les solutions proposées, sur la schématisation, la représentation graphique, le choix des notations, la conduite littérale et enfin l'application numérique.

Notons cependant qu'il ne sert à rien de lire à priori la solution d'un exercice, mais qu'il faut chercher cette solution après avoir lu l'énoncé en entier et ne consulter la solution proposée dans le livre que pour contrôler son propre résultat ou en cas d'hésitation.

Nous formons le vœu que cet ouvrage constitue un outil efficace pour les apprenants des **classes de premières scientifiques et techniques** et qu'il apporte à nos collègues professeurs l'aide qu'ils sont en droit d'attendre. Nous attendons avec plaisir toutes les remarques et suggestions.


J.P. Kengne
E. Simo
Mathématiques
Premières C, E
Nouvelle Edition

;

Table des matières


Mathématiques
Premières C, E
Nouvelle Edition

1

Sujets d'examen – Probatoire Mathématiques – Séries C, E

1.1 Enoncé des sujets d'examen

1.1.1 Enoncé – Probatoire 2012

Examen:	Probatoire	Séries:	C, E
Session:	2012	Durée:	3 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	6/5

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|4x+2| > |3-x|$
On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) : (x-1)\left(x^2-3\right) = 39$$

1.1. 1.1.1. Écrire 39 sous forme d'un produit de facteur premier
1.1.2. Trouver alors une solution de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels
1.1.3. Montrer que cette solution entière est l'unique qu'admet l'équation (E) dans $\mathbb{R}$
1.2. Calculer le réel A défini par :

$$A = \left(1+\frac{1}{4}\right)\times\left(1+\frac{1}{5}\right)\times\left(1+\frac{1}{6}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{999}\right)$$

Exercice 2.

2.1. Soit θ un nombre réel
2.1.1. Développer $\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)^2$
2.1.2. En déduire que $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2\theta\right)$
2.1.3. Résoudre dans $]-\pi, \pi[$
l'équation $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \frac{5}{8}$
2.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et telle que :

$$u_0 \in \mathbb{R}; q > 0 \text{ et } \begin{cases} u_0 \times u_1 \times u_2 = 27 \\ u_0 \times u_2 \times u_4 = 216 \end{cases}$$

2.2.1. Déterminer la raison et le premier terme u_0
2.2.2. En déduire u_n en fonction de n

Exercice 3.

Problème
3.1. Partie A
3.1.1. On considère les fonctions numériques suivantes :

$$\begin{cases} f : [-2,2] \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g : [0,4] \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 - 4x + 5 \end{cases}$$

(C) et (C') sont respectivement les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan

3.1.1.1. Construire la courbe (C)
3.1.1.2. Vérifier que $\forall x \in [0,4]; g(x) = f(x-2)+1$
3.1.1.3. Comment peut-on déduire la courbe (C') de la courbe (C)?
3.1.1.4. Représenter la courbe (C')
3.1.2. On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et h l'homothétie de centre O et de rapport 2. Soient I et J les points du plan de coordonnées respectives $(1,0)$ et $(0,1)$
3.1.2.1. Construire les images I' et J' des points I et J par la transformation $s = r \circ h$
3.1.2.2. Donner la nature du triangle $OI'J'$
3.1.2.3. Démontrer que les droites (II') et (JJ') sont perpendiculaires.
3.1.2.4. Montrer que $II' = JJ'$
3.2. Partie B
E est le plan vectoriel de base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ et f l'application linéaire de E dans E définie par $f\left(\vec{i}\right) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $f\left(\vec{j}\right) = \vec{i} + 4\vec{j}$
3.2.1. Écrire la matrice M de f dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$
3.2.2. Déterminer le noyau de f
3.2.3. f est-elle bijective? justifier votre réponse
3.2.4. Donner une base de l'image de f
3.2.5. Donner l'expression analytique de $f \circ f$
3.3. Partie C
L'espace (E) est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soient (P) et (P') les plans d'équations cartésiennes respectives $2x+3y+6z=0$ et $3x-6y+2z+1=0$
3.3.1. Démontrer que (P) et (P') sont perpendiculaires.
3.3.2. Déterminer une équation paramétrique de la droite (D) intersection des deux plans (P) et (P')
3.3.3. Soit A le point de coordonnées $(-4; 1; -2)$
3.3.3.1. Calculer les distances du point A à (P) et à (P')
3.3.3.2. En déduire la distance de A à (D)

1.1.2 Enoncé – Probatoire 2013

Examen:	Probatoire	Séries:	C, E
Session:	2013	Durée:	3 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	6/5

Exercice 4.

Pour chacune des questions, il vous est proposé trois réponses parmi lesquelles une seule est juste; reproduire sur votre feuille de composition le numéro de la question et celui de la réponse juste correspondante.

4.1. Le plan vectoriel est rapporté à une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$; f est l'endomorphisme du plan défini pour tout vecteur $\vec{u}(x,y)$ par $f(\vec{u}) = (2x-2y)\vec{i} - (x+y)\vec{j}$ Le noyau de f est :
- ☐ a. $\{\vec{0}\}$
- ☐ b. La droite vectorielle de base $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$
- ☐ c. La droite vectorielle de base $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{j}$

4.2. Le plan vectoriel est rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$; la matrice de l'endomorphisme g défini pour tout $\vec{u}(x, y)$ par $g(\vec{u}) = (-x-y)\vec{\imath} + (x-y)\vec{\jmath}$ est :

- ☐ a. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ b. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

4.3. L'espace affine est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. P et P' sont deux plans d'équations cartésiennes respectives : $x - 2y + z + 2 = 0$ et $x + y + z + 2 = 0$; les plans P et P' sont :

- ☐ a. Parallèles
- ☐ b. Perpendiculaires
- ☐ c. Confondus

4.4. A et B sont deux points du plan euclidien; I est le milieu de $[AB]$; G est le barycentre du système $\{(A,3);(B,-1)\}$. L'ensemble des points M tels que $\left\|3\vec{MA} - \vec{MB}\right\| = \left\|\vec{MA} + \vec{MB}\right\|$ est :

- ☐ a. Le cercle de diamètre $[GI]$
- ☐ b. $\emptyset$
- ☐ c. La médiatrice de $[GI]$

4.5. Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; le cercle (C) d'équation cartésienne $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$, et la droite (D) d'équation cartésienne $3x + 4y + 11 = 0$ sont :

- ☐ a. Sécants
- ☐ b. Tangents
- ☐ c. Disjoints

Exercice 5.

5.1. Montrer que pour tout x réel,

$$\cos x \sin x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16} \sin 16x$$

5.2. En déduire que

$$\cos\frac{\pi}{32} \sin\frac{\pi}{32} \cos\frac{\pi}{16} \cos\frac{\pi}{8} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}.$$

5.3. On considère la fonction polynôme p définie, pour tout réel x, par $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

5.3.1. Calculer $p(-1)$; en déduire que

$$p(x) = (x+1)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.

5.3.2. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2\sin^3 2x + 5\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$$

Exercice 6.

Problème

6.1. Partie A

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$$

6.1.1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

6.1.2. Calculer la dérivée et dresser le tableau de variation de f.

6.1.3. Montrer que la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, admet une asymptote oblique et une asymptote verticale, dont on donnera les équations cartésienne respectives.

6.1.4. Tracer (C) et ses asymptotes.

6.1.5. Montrer que le point $K(1,1)$ est le centre de symétrie de (C)

6.1.6. m étant un paramètre réel, discuter graphiquement l'existence et le nombre de solutions de l'équation

$$x^2 + 2mx - 2m = 0$$

6.2. Partie B

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel $n > 1$ par la relation

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2(u_n - 1)} \text{ avec } u_2 = 4$$

6.2.1. Calculer u_3, u_4 et u_5

6.2.2. Placer u_2, u_3, u_4 et u_5 sur la graphique de la fonction f.

6.2.3. En déduire le sens de variation de (u_n)

1.1.3 Enoncé – Probatoire 2014

Examen:	Probatoire	Séries:	C, E
Session:	2014	Durée:	3 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	6/5

Exercice 7.

7.1. **7.1.1.** Calculer $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

7.1.2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ ab = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

7.1.3. En déduire dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, les solutions du système d'inconnues (x, y) suivant :

$$\begin{cases} 2\sin x + 2\sin y = \sqrt{3} + 1 \\ \sin x \times \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

7.2. Dans le plan vectoriel E muni d'une base $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application linéaire f de E vers E et de matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

relativement à B

7.2.1. Déterminer le noyau et l'image de f

7.2.2. On pose $M' = 2M - 2I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que M' est la matrice inverse de M

Exercice 8.

On s'est intéressé au nombre de personnes qui ont visité un site touristique sur 7 ans. Les résultats de cette enquête sont consignés dans un tableau ci-dessous :

Rang de l'année (X)	Nombre de personnes en milliers (Y)
1	1,5
2	2
3	3,5
4	1
5	6
6	8
7	10

8.1. Représenter le nuage de points de la série statistique ainsi définie

8.2. 8.2.1. Calculer la covariance de la série statistique (X, Y). On donnera le résultat à 10^{-2} près par excès

8.2.2. En prenant la moyenne de Y égale à 4,57 ; la variance de X égale à 4 et la variance de Y égale à 10,46

8.2.2.1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y

8.2.2.2. Justifier qu'une équation de la droite de régression de Y en X est : $y = 1{,}43x - 1{,}15$

8.2.3. En déduire une estimation du nombre de personnes qui visiteront ce site en l'année de rang 31

8.3. Ce site comporte 5 escales distinctes nommées A, B, C, D et E. Elles sont obligatoires pour tous ses visiteurs qui y passent une seule fois par escale. De combien de façons distinctes peut-on :

8.3.1. Parcourir les 5 escales ?

8.3.2. Parcourir les 5 escales si on commence toujours par l'escale A ?

Exercice 9.

Problème

9.1. Partie A

Dans le plan orienté, $ABCD$ est un carré direct de centre O et de côté $AB = 6$. I est le milieu du segment $[AB]$. M et N des points des segments $[AD]$ et $[DC]$ respectivement tels que $AM = DN$; $M \neq A$ et $M \neq D$

9.1.1. Soit r la rotation qui transforme A en D et M en N. Déterminer la mesure principale de l'angle de r

9.1.2. 9.1.2.1. Montrer que

$$OM^2 = 18 - 6AM + AM^2 = ON^2$$

9.1.2.2. En déduire que O est le centre de la rotation r

On pose pour toute la suite $AM = x$ et on appelle G, le barycentre du système $A(7-x)$, $B(1)$ et $D(x)$

9.1.3. 9.1.3.1. Soit k le réel tel que $\vec{AM} = k\vec{DM}$. Déterminer k en fonction de x et en déduire que M est le barycentre de A et D affectés respectivement des coefficients $6-x$ et x.

9.1.3.2. Vérifier que
$(7-x)\vec{GA} + \vec{GB} + x\vec{GD} = \vec{GA} + \vec{GB} + (6-x)\vec{GA} + x\vec{GD}$
et en déduire que G est barycentre des points M et I affectés de coefficients que l'on déterminera.

9.1.3.3. Soit G', l'image de G par r et J le milieu de $[AD]$. Justifier que $\vec{G'J} = \frac{3}{4}\vec{NJ}$

9.1.4. 9.1.4.1. Exprimer les aires des triangles IAM et MDN en fonction de x

9.1.4.2. Montrer que l'aire A_1 du trapèze $BCNI$ en unité d'aire est $A_1 = 27 - 3x$

9.1.4.3. En déduire que l'aire A du triangle IMN en unité d'aire est :

$$A = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$$

Partie B

Soit f la fonction définie, de l'intervalle $[0, 6]$ vers $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$

9.1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

9.2. 9.2.1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations

9.2.2. En déduire que pour tout réel $x \in [0, 6]$, $f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$

9.2.3. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle IMN est minimale

9.3. Représenter f dans un repère orthogonal. (Échelle : 1 cm pour 1 unité en abscisse ; 1 cm pour 3 unité en ordonnées.)

9.4. Soit g la fonction définie de $[-6, 6]$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$

9.4.1. Étudier la continuité et la dérivabilité de g en 0

9.4.2. Justifier que g est une fonction paire

9.4.3. Déduire en traits interrompus courts, la courbe de g de celle de f.

1.1.4 Enoncé – Probatoire 2015

Examen:	Probatoire	Séries:	C, E
Session:	2015	Durée:	3 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	6/5

Exercice 10.

10.1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$4x^2-2x-1=0.$$

Pour toute la suite, on pose $x=\cos\frac{\pi}{5}$ et $y=\sin\frac{\pi}{5}$

10.2. Exprimer $\sin\frac{2\pi}{5}$ en fonction de x et y

10.3. **10.3.1.** Justifier que

$$\cos\frac{2\pi}{5}=1-2y^2=2x^2-1$$

10.3.2. En déduire que $\sin\frac{3\pi}{5}=y\left(4x^2-1\right)$

10.4. **10.4.1.** Justifier que $\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\frac{3\pi}{5}$

10.4.2. En déduire que :

$$4x^2-2x-1=0$$

10.4.3. Déduire alors que :

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Exercice 11.

On s'est intéressé aux dépenses en appels téléphoniques de 100 personnes durant une semaine. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous; les effectifs des personnes qui ont dépensé 4300 et 7500 F CFA durant cette semaine sont désignés par x et y respectivement.

Dépenses en F CFA	Effectifs
1500	10
4300	x
7500	y
10 500	30

11.1. La moyenne M de la série statistique ainsi définie est $M=7000$. Justifier que x et y vérifient le système

$$\begin{cases} 43x+75y=3700 \\ x+y=60 \end{cases}$$

11.2. En déduire les valeurs de x et y

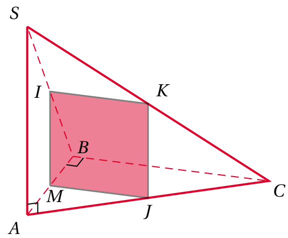
11.3. Un opérateur de téléphonie locale voudrait attribuer des prix identiques à un groupe de 5 personnes choisies au hasard parmi les 30 ayant dépensé 10 500 F CFA

11.3.1. De combien de façons peut-on constituer le groupe à primer?

11.3.2. Ces personnes étant choisies et les prix identiques étant au nombre de 7, de combien de façons peuvent être attribués ces prix si chacune des personnes reçoit au moins 1 prix?

Exercice 12.

Problème



12.1. Partie A

Sur la figure ci-contre, $SABC$ est un tétraèdre. La droite (SA) est orthogonale au plan (ABC) et le triangle ABC rectangle en B. M est un point du segment $[AB]$ différent de A et B

12.1.1. Justifier que les droites (SA) et (BC) sont orthogonales

12.1.2. Le plan (P) passant par M et perpendiculaire à la droite (AB) coupe les segments $[SB]$, $[SC]$ et $[AC]$ en I, K et J respectivement

12.1.2.1. Montrer que la droite (IM) est parallèle au plan (SAC) et en déduire que $(IM)//(KJ)$. (On pourra raisonner par l'absurde)

12.1.2.2. Montrer que $(MJ)//(BC)$ et en déduire que $(MJ)//(IK)$

12.1.2.3. Justifier que $IKJM$ est un rectangle.

12.1.2.4. On donne $AB=3$; $SA=BC=4$ et on pose $AM=x$. $S(x)$ désigne l'aire du rectangle $IKJM$ en m^2. Exprimer $S(x)$ en fonction de x

12.2. Partie B

Soit f la fonction définie dans $[0;3]$ par $f(x)=-x^2+3x$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$

12.2.1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

12.2.2. **12.2.2.1.** Vérifier que $S(x)=\frac{16}{9}f(x)$

12.2.2.2. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $IKJM$ est maximale et calculer cette aire.

12.2.2.3. Calculer l'aire du rectangle $IKJM$ lorsque $x=2$

12.2.3. Tracer $\left(C_f\right)$ (unité de longueur sur les axes : 1,5 cm)

12.2.4. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse $x=\frac{1}{2}$

12.2.5. Soit $\left(U_n\right)$ la suite définie pour tout entier naturel n par $U_n=2n+\frac{1}{4}$. Montrer que $\left(U_n\right)$ est une suite arithmétique dont on donnera le 1 $^{\text{er}}$ terme et la raison.

1.1.5 Enoncé – Probatoire 2016

Examen:	Probatoire	Séries:	C, E
Session:	2016	Durée:	3 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	6/5

Exercice 13.

Une urne contient sept jetons portant les numéros : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; -1 et -3. On tire deux jetons successivement avec remise dans cette urne. On désigne par a le numéro porté par le premier jeton et par b, celui porté par le deuxième jeton. A et B sont deux points fixes et distincts d'un plan (P). Déterminer le nombre de couples (a,b) pour lesquels :

13.1. Les points pondérés (A,a) et (B,b) admettent un barycentre.

13.2. Le vecteur $a\vec{AM}+b\vec{BM}$ est constant quelque soit le point M du plan (P).

13.3. Les points pondérés (A,a) et (B,b) admettent un barycentre et ce barycentre appartient à $[AB]$.

13.4. Les points pondérés (A,a) et (B,b) admettent un barycentre et ce barycentre est en dehors du segment $[AB]$.

Exercice 14.

14.1. Soient A, B et C trois points distincts du plan orienté (P) tels que ABC soit un triangle équilatéral direct de centre de gravité G. A', B' et C' sont trois points de (P) tels que

$$\vec{AA'}=\frac{1}{3}\vec{CA};\qquad \vec{BB'}=\frac{1}{3}\vec{AB};\qquad \vec{CC'}=\frac{1}{3}\vec{BC}.$$

On désigne par r la rotation de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

14.1.1. 14.1.1.1. Déterminer l'image de la demi-droite $[CA)$ par r.

14.1.1.2. Montrer que $r(A')=B'$.

14.1.2. 14.1.2.1. Montrer que $r(B')=C'$.

14.1.2.2. En déduire que le triangle $A'B'C'$ est équilatéral.

14.2. On suppose $AB=3$ et on désigne par (d) droite la perpendiculaire au plan (ABC) passant par A. Soient S un point de (d) tel que $SA=4$, E et F des points tels que

$$\vec{SE}=\frac{16}{25}\vec{SB}\qquad\text{et}\qquad \vec{SF}=\frac{16}{25}\vec{SC}.$$

Les droites (AE) et (SB) sont-elles perpendiculaires ? Justifier votre réponse.

Exercice 15.

Problème :

15.1. Partie A

On s'est intéressé aux variations de la hauteur d'un ruisseau en fonction du temps lors d'une forte pluie. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-après :

Temps en heures	(X)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Hauteur d'eau en mètres	(Y)	0,6	1,2	1,9	2,4	2,2	2	1,5

15.1.1. 15.1.1.1. On donne $\mathrm{Cov}(X,Y)=0{,}33$. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(X;Y)$.

15.1.1.2. Un ajustement linéaire est-il approprié ?

15.1.2. Représenter le nuage de points associé à la série $(X;Y)$ dans un repère orthogonal (unités : 1 cm pour 0,5 h en abscisses et 1 cm pour 0,2 m en ordonnées).

15.1.3. Soit f la fonction f définie de $[0;\pi]$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$. On désigne par (C) sa courbe représentative et on admet que (C) passe par les points $A(0;0{,}6)$; $B(1;1{,}9)$ et $C(2{,}5;2)$.

15.1.3.1. Déterminer a, b et c à 10^{-1} près par défaut.

15.1.3.2. Étudier et représenter f dans le même repère que le nuage de points (prendre $\pi=3{,}14$).

15.1.3.3. En admettant que f est un ajustement de la série $(X;Y)$, déterminer la hauteur de l'eau de ce ruisseau 165 minutes après le début de la pluie.

15.2. Partie B

Soit g la fonction définie de $[0;\pi]$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+1$. On désigne par (C_1) sa courbe représentative dans le repère orthogonal de la partie A.

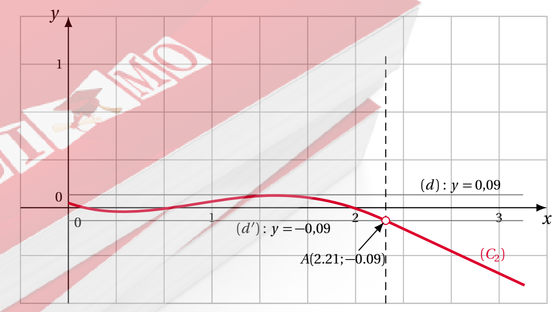
15.2.1. Montrer que pour tout réel $x\in[0;\pi]$, $g(x)=-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{5\pi}{12}\right)+1$.

15.2.2. 15.2.2.1. Calculer $g'(x)$ et justifier que $g'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left[0;\dfrac{7\pi}{12}\right[$.

15.2.2.2. Dresser le tableau de variation de g.

15.2.3. Tracer en traits interrompus courts, la courbe (C_1) dans le même repère que celui du nuage de points.

15.2.4. Ci-contre sont représentés dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C_2) représentative de la fonction h définie dans $[0;\pi]$ par $h(x)=g(x)-f(x)$ où f est la fonction de la partie A, les droites (d) et (d') d'équations respectives : $y=0{,}09$ et $y=-0{,}09$ et le point d'intersection de (C_2) et (d') nommé A.
Déterminer par lecture graphique, les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est une valeur approchée de $g(x)$ à 10^{-2} près.



1.1.6 Enoncé – Probatoire 2017

Examen:	Probatoire	Séries:	C, E
Session:	2017	Durée:	3 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	6/5

Exercice 16.

On considère l'équation (E) :

$$2\sqrt{2}\cos^2 x+\left(2-\sqrt{2}\right)\cos x-1=0$$

et le polynôme $P(x)=2\sqrt{2}x^2+\left(2-\sqrt{2}\right)x-1$ de variable réelle x.

16.1. Calculer $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

16.2. Vérifier que le polynôme $P(x)$ admet 2 racines distinctes.

16.3. En utilisant la somme ou le produit des racines, déterminer l'autre racine.

16.4. En déduire dans l'intervalle $[0;2\pi[$, l'ensemble solutions de l'équation (E).

16.5. Placer les points images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.

Exercice 17.

E est un plan vectoriel; $B=(\vec{i},\vec{j})$ est une base de E et f est l'endomorphisme de E défini par

$$f(\vec{i}-\vec{j})=3\vec{i}-\vec{j} \text{ et } f(\vec{i}+\vec{j})=-\vec{i}+5\vec{j}.$$

17.1. Montrer que la matrice de f dans la base B est $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

17.2. Soit g l'endomorphisme de E défini par

$$g(\vec{i})=\vec{i}-\vec{j}+f(\vec{i}) \text{ et } g(\vec{j})=8\vec{i}+f(\vec{j}).$$

17.2.1. Déterminer la matrice A de g dans la base B.

17.2.2. Montrer que Ker$g$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e}_1=6\vec{i}-2\vec{j}$.

17.2.3. Montrer que Img est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e}_2=2\vec{i}+\vec{j}$.

On pose $B'=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

17.2.4. Montrer que B' est une base de E.

17.2.5. Montrer que $g(\vec{e}_2)=5\vec{e}_2$.

17.2.6. En déduire la matrice A' de g dans la base B'.

Exercice 18.

18.1. Déterminer les réels x et y tels que

$$\begin{cases}x+y=40\\ x\times y=256\end{cases}$$

18.2. a, b et c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique à termes positifs et décroissante tels que :

$$\begin{cases}a+b+c=56\\ a\times b\times c=4096\end{cases}$$

18.2.1. Calculer 16^3 et déterminer b.

18.2.2. En déduire a et c.

Exercice 19.

Le problème comporte trois parties 1, 2 et 3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; on considère $A(0;2)$, $B(-2;0)$ et $C(2;0)$ trois points du plan. On note G le barycentre des points pondérés $(A,2)$; $(B,1)$ et $(C,1)$.

19.1. **Partie 1**

19.1.1. Montrer que le point O est le milieu du segment $[BC]$.

19.1.2. En déduire que le point G appartient à la droite (AO).

19.1.3. Déterminer les coordonnées du point G.

19.1.4. Montrer que pour tout point M du plan,

$$AM^2+OM^2=2GM^2+2.$$

19.1.5. En déduire que l'ensemble (T) des points M du plan tels que :

$$2AM^2+BM^2+CM^2=28$$

est un cercle dont on précisera le rayon et le centre.

19.2. **Partie 2**

Soit la fonction f définie de IR vers IR par

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

où a, b et c sont trois réels.

On suppose que la courbe de la fonction f passe par les points A, B et C.

19.2.1. Montrer que pour tout réel x,

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2.$$

19.2.2. Résoudre dans IR, l'inéquation $f(x)\geq 0$.

19.3. **Partie 3**

Soit g la fonction définie de IR vers IR par

$$g(x)=\frac{-x^2+x-4}{x},$$

(C) sa courbe représentative.

19.3.1. Déterminer l'ensemble de définition D de g.

19.3.2. Déterminer les limites de g en $-\infty,+\infty,0^-$ et 0^+ ; en déduire une équation de l'asymptote verticale à la courbe (C).

19.3.3. Montrer que pour tout réel x différent de zéro, $g'(x)=\dfrac{2f(x)}{x^2}$ où g' est la fonction dérivée de g.

19.3.4. Déduire de la question II-2), le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

19.3.5. Montrer que pour tout réel x différent de zéro, $g(x)=-x+1-\dfrac{4}{x}$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y=-x+1$ est asymptote oblique à la courbe (C).

19.3.6. Déterminer la distance du point G à la droite (D) et en déduire que la droite (D) est sécante au cercle (T). Préciser les coordonnées de leurs points d'intersection.

19.3.7. Tracer la courbe (C) et ses asymptotes, (unités sur les axes : 1 cm)

1

1.2 Solution des sujets d'examen

1.2.1 Solution – Probatoire 2012

Solution 1. (p. 2)

1.1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|4x+2|>|3-x|$

$$\begin{aligned}&|4x+2|>|3-x|\\ \Leftrightarrow\ &(4x+2)^2>(3-x)^2\\ \Leftrightarrow\ &16x^2+16x+4>x^2-6x+9\\ \Leftrightarrow\ &15x^2+22x-5>0\end{aligned}$$

Résolvons d'abord l'équation $15x^2+22x-5=0$

$$\Leftrightarrow\ \Delta=22^2-4\times 15(-5)=784=28^2$$

D'où

$$x_1=\frac{-22-28}{30}=-\frac{50}{30}=-\frac{5}{3}$$

et

$$x_2=\frac{-22+28}{30}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

Ainsi l'inéquation devient

$$15\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)>0$$

Étudions le signe de $\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)$ dans le tableau suivant

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$x-\frac{1}{5}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{5}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S=\left]-\infty,-\frac{5}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{5},+\infty\right[$$

1.2. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E):(x-1)\left(x^2-3\right)=39$

1.2.1. Écrivons 39 sous la forme d'un produit de facteurs premiers

On a : $39=3\times 13$

1.2.2. Trouvons une solution de (E) dans $\mathbb{N}$

On $(x-1)\left(x^2-3\right)=39$ et $x\in\mathbb{N}$

$\Longrightarrow x-1=3$ ou $x-1=13$

$\Longrightarrow x=4$ ou $x=14$

Pour $x=4$ on a

$$(x-1)\left(x^2-3\right)=3\times(16-3)=39$$

D'où 4 est une solution entière de (E)

1.2.3. Montrons que cette solution entière est l'unique qu'admet (E)

Nous allons résoudre (E) et voir s'il existe une autre solution de (E).

On a $(E):(x-1)\left(x^2-3\right)=39 \Leftrightarrow x^3-x^2-3x-36=0$

Or 4 est solution de (E) donc il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $x^3-x^2-3x-36=(x-4)\left(x^2+ax+b\right)$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-3x-36=x^3+(a-4)x^2+(b-4a)x-4b$

Par identification on a

$$\begin{cases}a-4=-1\\ b-4a=-3\\ -4b=-36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=9\end{cases}$$

D'où $(E):(x-4)\left(x^2+3x+9\right)=0$

$\Leftrightarrow x=4$ ou $x^2+3x+9=0$

Résolvons $x^2+3x+9=0$

On a $\Delta=9-4\times 9=-27<0$

Donc l'équation $x^2+3x+9=0$ n'admet aucune solution réelle et par conséquent 4 est l'unique solution de (E).

1.3. Calculons A

$$\begin{aligned}A&=\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\left(1+\frac{1}{5}\right)\times\left(1+\frac{1}{6}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{999}\right)\\ &=\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\frac{7}{6}\times\frac{8}{7}\times\cdots\times\frac{999}{998}\times\frac{1000}{999}\end{aligned}$$

En simplifiant on obtient

$$A=\frac{1}{4}\times\frac{1000}{1}=\frac{1000}{4}=250$$

Donc $A=250$

Solution 2. (p. 2)

2.1. Soit θ un nombre réel.

2.1.1. Développons $\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)^2$

$$\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)^2=\cos^4\theta+\sin^4\theta-2\cos^2\theta\sin^2\theta$$

2.1.2. Déduisons que $\cos^4\theta+\sin^4\theta=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2\theta\right)$.

On sait que $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

et $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}&\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)^2=\cos^4\theta+\sin^4\theta-2\cos^2\theta\sin^2\theta\\ \Leftrightarrow\ &(\cos 2\theta)^2=\cos^4\theta+\sin^4\theta-\frac{1}{2}(2\cos\theta\sin\theta)^2\\ \Leftrightarrow\ &\cos^2 2\theta=\cos^4\theta+\sin^4\theta-\frac{1}{2}(\sin 2\theta)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^4\theta+\sin^4\theta&=\cos^2 2\theta+\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\\ &=\cos^2 2\theta+\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 2\theta\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(2\cos^2 2\theta+1-\cos^2 2\theta\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2\theta\right)$$

2.1.3. Résolvons dans $]-\pi,\pi[$ l'équation $\cos^4\theta+\sin^4\theta=\frac{5}{8}$

On sait $\cos^4\theta+\sin^4\theta=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2\theta\right)$

Donc

$$\begin{aligned}
&\cos^4\theta+\sin^4\theta=\frac{5}{8}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2\theta\right)=\frac{5}{8}\\
\Leftrightarrow\ &1+\cos^2 2\theta=\frac{5}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\cos^2 2\theta=\frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2\theta=\frac{1}{2}\\
&\text{ou } \cos 2\theta=-\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &2\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\
&\text{ou } 2\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\
&\text{ou } 2\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\
&\text{ou } 2\theta=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\\
\Leftrightarrow\ &\theta=\frac{\pi}{6}+k\pi\\
&\text{ou } \theta=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\
&\text{ou } \theta=\frac{\pi}{3}+k\pi\\
&\text{ou } \theta=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\,(k\in\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Nous allons à présent chercher les solutions de (E) dans $]-\pi,\pi[$

- Pour $\theta=\frac{\pi}{6}+k\pi$

$$\begin{aligned}
&\theta\in]-\pi,\pi[\\
\Leftrightarrow\ &-\pi<\theta<\pi\\
\Leftrightarrow\ &-\pi<\frac{\pi}{6}+k\pi<\pi\\
\Leftrightarrow\ &-1<\frac{1}{6}+k<1\\
\Leftrightarrow\ &-\frac{7}{6}<k<\frac{5}{6};(k\in\mathbb{Z})\\
\Leftrightarrow\ &k=-1 \text{ ou } k=0
\end{aligned}$$

D'où $\theta=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$ ou $\theta=\frac{\pi}{6}$

- Pour $\theta=-\frac{\pi}{6}+k\pi$

$$\begin{aligned}
&-\pi<\theta<\pi\\
\Leftrightarrow\ &-\pi<-\frac{\pi}{6}+k\pi<\pi\\
\Leftrightarrow\ &-1<-\frac{1}{6}+k<1\\
\Leftrightarrow\ &-\frac{5}{6}<k<\frac{7}{6}
\end{aligned}$$

$(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow$ $k=0$ ou $k=1$ d'où $\theta=-\frac{\pi}{6}$ ou $\theta=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$

- Pour $\theta=\frac{\pi}{3}+k\pi$ De même on obtient $\theta=-\frac{2\pi}{3}$ ou $\theta=\frac{\pi}{3}$
- Pour $\theta=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ on obtient $\theta=-\frac{\pi}{3}$ ou $\theta=\frac{2\pi}{3}$

D'où l'ensemble solution dans $]-\pi,\pi[$ est

$$S=\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right\}$$

2.2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

2.2.1. Déterminons q et u_0

(u_n) étant une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0,on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=q\,u_n$ et $u_n=q^n u_0$

Or

$$\begin{cases}u_0\times u_1\times u_2=27\\ u_0\times u_2\times u_4=216\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u_0\times q^{u_0}q^2u_0=27\\ u_0\times q^{2u_0}\times q^4u_0=216\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}q^3\times {u_0}^3=27 & \text{(a)}\\ q^6\times {u_0}^3=216 & \text{(b)}\end{cases}$$

En divisant (b) par (a), membre à membre,
On obtient

$$\begin{aligned}
&q^3=\frac{216}{27}=8\\
\Leftrightarrow\ &q^3-8=0\\
\Leftrightarrow\ &(q-2)\left(q^2+2q+4\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &q-2=0 \text{ ou } q^2+2q+4=0\\
\Leftrightarrow\ &q=2 \text{ ou } (q+1)^2+3=0\\
\Leftrightarrow\ &q=2
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (a) on obtient

$$\begin{aligned}
&8{u_0}^3=27\\
\Leftrightarrow\ &{u_0}^3=\frac{27}{8}=\left(\frac{3}{2}\right)^3\\
\Leftrightarrow\ &{u_0}^3-\left(\frac{3}{2}\right)^3=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(u_0-\frac{3}{2}\right)\left({u_0}^2+\frac{3}{2}u_0+\frac{9}{4}\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(u_0-\frac{3}{2}\right)\left[\left(u_0+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{9}{4}\right]=0\\
\Leftrightarrow\ &u_0=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Donc $q=2$ et $u_0=\frac{3}{2}$.

2.2.2. Déduisons u_n en fonction de n

(u_n) étant une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $u_0 = \frac{3}{2}$,

$$\forall\ n \in \mathbb{N};\ u_n = u_0 q^n = \left(\frac{3}{2}\right) 2^n = 3 \times 2^{n-1}$$

Solution 3. (p. 2)

Problème

3.1. Partie A

3.1.1. On considère les fonctions suivantes :

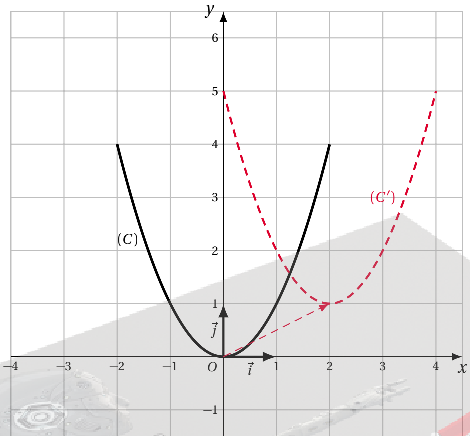
$$\begin{cases} f : [-2,2] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g : [0,4] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 4x + 5 \end{cases}$$

(C) et (C') les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3.1.1.1. Construisons la courbe (C)



3.1.1.2. Vérifions que $\forall\ x \in [0,4];\ g(x) = f(x-2)+1$

On a $\forall\ x \in [0,4],\ 0 \le x \le 4 \iff -2 \le x-2 \le 2$

Et

$$\begin{aligned} f(x-2)+1 &= (x-2)^2 + 1 \\ &= x^2 - 4x + 4 + 1 \\ &= x^2 - 4x + 5 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

D'où $\forall\ x \in [0,4];\ g(x) = f(x-2)+1$

3.1.1.3. D'après **3.1.1.2.** (C') est l'image de (C) par la translation de vecteur $\vec{u}(2,\ 1)$.

Il suffit donc de construire l'image de (C) par cette translation pour obtenir (C').

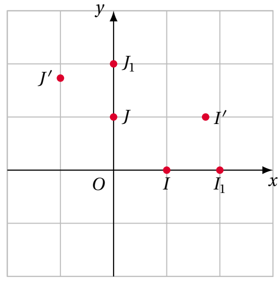
3.1.1.4. Représentons (C') (*voir figure ci-dessus*)

3.1.2. On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et h l'homothétie de centre O et de rapport 2. Soient $I(1,0)$ et $J(0,1)$

3.1.2.1. Construisons $I' = r \circ h(I)$ et $J' = r \circ h(J)$

Nous allons poser $I_1 = h(I)\ \ et\ \ J_1 = h(J)$

Ce qui signifie que $I' = r(I_1)$ et $J' = r(J_1)$



Remarque :

$s = r \circ h$ est la similitude directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport 2.

Donc son écriture complexe est $z' = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z = \left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right) z$.

Nous pouvons en déduire que

$$z_{I'} = \left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)(1+0\mathrm{i}) = \sqrt{3}+\mathrm{i}$$

$$\text{et } z_{J'} = \left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)(0+\mathrm{i}) = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$$

D'où $I'\left(\sqrt{3};1\right)$ et $J'\left(-1;\sqrt{3}\right)$

3.1.2.2. Nature du triangle $OI'J'$

Comme OIJ est un triangle rectangle isocèle en O, son image OI_1J_1 par h est également un triangle rectangle isocèle en O. Aussi $OI'J'$ qui est l'image de OI_1J_1 par r, est un triangle rectangle isocèle en O.

3.1.2.3. Démontrons que les droites $(II')\ \ et\ \ (JJ')$ sont perpendiculaires.

On a $I(1;0)$, $J(0;1)$, $I'\left(\sqrt{3};1\right)$ et $J'\left(-1;\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \vec{II'}\left(\sqrt{3}-1;1\right)$ et $\vec{JJ'}\left(-1;\sqrt{3}-1\right)$

$\Rightarrow \vec{II'} \cdot \vec{JJ'} = -\left(\sqrt{3}-1\right) + \sqrt{3} - 1 = 0$ D'où (II') et (JJ') sont perpendiculaires.

3.1.2.4. Montrons que $II' = JJ'$

A la question précédente, nous avons obtenu que $\overrightarrow{II'}\left(\sqrt{3}-1;1\right)$ et $\overrightarrow{JJ'}\left(-1;\sqrt{3}-1\right)$

Nous en déduisons que

$$II' = JJ' = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 1^2} = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

3.2. Partie B

Soit E le plan vectoriel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et f l'application de E dans E définie par $f(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

3.2.1. La matrice M de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est : $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

3.2.2. Déterminons le noyau de f

- *Méthode 1 :*

  Nous allons d'abord déterminer l'expression analytique de f

  Soit $\vec{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{u'}(x',y') = f(\vec{u})$

  Alors

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ -2x+4y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x' = 3x+y \\ y' = -2x+4y \end{cases}$$

  Déterminons alors le noyau $\ker f$

$$\vec{u}(x,y) \in \ker f$$

$$\Leftrightarrow f(\vec{u})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=0 \\ -2x+4y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x & (1) \\ -x+2y=0 & (2) \end{cases}$$

(1) dans (2) donne

$$\begin{aligned} -x+2(-3x)&=0 \\ \Leftrightarrow -7x&=0 \\ \Leftrightarrow x&=0 \end{aligned}$$

D'où $y=-3x=0$
Donc $\vec{u}=\vec{0}$
Ainsi $\ker f=\{\vec{0}\}$

- *Méthode 2* :
Puisque $\det M=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=3\times 4+2\times 1=14\neq 0$
D'où $\ker f=\{\vec{0}\}$

3.2.3. Comme $\ker f=\{\vec{0}\}$, f est bijective.
3.2.4. f étant bijective $\Im f=E$
Donc une base de $\Im f$ est $(\vec{i},\vec{j})$
3.2.5. Donnons une expression analytique de $f\circ f$

- *Méthode 1* :
Nous avons obtenu à la question **3.2.2.** l'expression analytique de f : $\begin{cases} x'=3x+y \\ y'=-2x+4y \end{cases}$
Soit $\vec{u}(x,y)$, $\overrightarrow{u_1}(x_1,y_1)=f(\vec{u})$ et $\overrightarrow{u'}(x',y')=f(\overrightarrow{u_1})$
Alors $\overrightarrow{u'}=f\circ f(\vec{u})$
Et on a

$$\begin{cases} x_1=3x+y \\ y_1=-2x+4y \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x'=3x_1+y_1 \\ y'=-2x_1+4y_1 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x'=3(3x+y)+(-2x+4y) \\ y'=-2(3x+y)+4(-2x+4y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=7x+7y \\ y'=-14x+14y \end{cases}$$

- *Méthode 2* :
La matrice de $f\circ f$ est :

$$M^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -14 & 14 \end{pmatrix}$$

D'où l'expression analytique de $f\circ f$ est

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -14 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\begin{cases} x'=7x+7y \\ y'=-14x+14y \end{cases}$$

3.3. Partie C

Soit l'espace E muni du repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\overrightarrow{k}\right)$. Soient $(P):2x+3y+6z=0$ et $(P'):3x-6y+2z+1=0$
3.3.1. Démontrons que $(P)\perp(P')$
D'après leurs équations cartésiennes, $\vec{n}(2,3,6)$ et $\overrightarrow{n'}(3,-6,2)$ sont respectivement des vecteurs normaux à (P) et (P')
Et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'}=2\times 3+3\times(-6)+6\times 2=0$
Donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{n'}$
Et par conséquent $(P)\perp(P')$
3.3.2. Équation paramétrique de (D), intersection de (P) et (P')

- *Méthode 1*

$$(D):\begin{cases} 2x+3y+6z=0 \\ 3x-6y+2z+1=0 \end{cases}$$

Posons $z=\alpha$
On a $\begin{cases} 2x+3y=-6\alpha \\ 3x-6y=-2\alpha-1 \end{cases}$
En résolvant on obtient $x=-2\alpha-\frac{1}{7}$ et $y=-\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{21}$
D'où l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-2\alpha-\frac{1}{7} \\ y=-\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{21} \\ z=\alpha \end{cases}$$

- *Méthode 2*
$\overrightarrow{u_0}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}$ est un vecteur directeur de (D)
Et

$$\vec{u}_0\left(\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}\right)$$
$$=(42,14,-21)$$

Donc $\vec{u}=\frac{1}{7}\overrightarrow{u_0}=(6;2;-3)$ est aussi un vecteur directeur de (D).
On vérifie aussi que le point $I\left(-\frac{1}{7},\frac{2}{21},0\right)\in(P)\cap(P')$
Donc (D) est la droite passant par I et admettant $\vec{u}(6;2;-3)$ comme vecteur directeur.
Donc $\forall M(x,y,z)\in(D)$; $\exists\alpha\in\mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{IM}=\alpha\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\left(-\frac{1}{7}\right)=6\alpha \\ y-\frac{2}{21}=2\alpha & (c\in\mathbb{R}) \\ z=-3\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{7}+6\alpha \\ y=\frac{2}{21}+2\alpha & (\alpha\in\mathbb{R}) \\ z=-3\alpha \end{cases}$$

3.3.3. On donne le point $A(-4;1;-2)$
3.3.3.1. Calculons la distance de A à (P) et à (P')
On sait que la distance d'un point $M_0(x_0;y_0;z_0)$ à un

plan d'équation $(P): ax+by+cz+d=0$ est

$$d(M,(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Donc

$$\begin{aligned} d(A,(P)) &= \frac{|2(-4)+3(1)+6(-2)|}{\sqrt{4+9+36}} \\ &= \frac{|-8+3-12|}{\sqrt{49}} \\ &= \frac{17}{7} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} d(A,(P')) &= \frac{|3(-4)-6(1)+2(-2)+1|}{\sqrt{9+36+4}} \\ &= \frac{|-12-6-4+1|}{\sqrt{49}} \\ &= \frac{21}{7}=3 \end{aligned}$$

3.3.3.2. Déduisons la distance de A à (D)

Soit H, H' et K les projetés orthogonaux de A sur (P), (P') et (D)

Alors $AHKH'$ est un rectangle et d'après le théorème de Pythagore

On a

$$\begin{aligned} & AK^2=AH^2+AH'^2 \\ \Leftrightarrow & \left(d(A,(D))\right)^2=\left(d(A,(P))\right)^2+\left(d(A,(P'))\right)^2 \\ & =\left(\frac{17}{7}\right)^2+(3)^2 \\ \Leftrightarrow & \, d(A,(D))=\sqrt{\left(\frac{17}{7}\right)^2+(3)^2}=\sqrt{\frac{730}{49}}=\frac{\sqrt{730}}{7} \end{aligned}$$

1.2.2 Solution – Probatoire 2013

Solution 4. (p. 2)

4.1. Déterminons $\ker f$

$\vec{u}(x,y)$, $f(\vec{u})=(2x-2y)\vec{i}-(x+y)\vec{j}$

$$\begin{aligned} \vec{u}\in\ker f &\Leftrightarrow f(\vec{u})=\vec{0} \\ &\Leftrightarrow (2x-2y)\vec{i}-(x+y)\vec{j}=\vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 & (1.1) \\ x+y=0 & (1.2) \end{cases} \end{aligned}$$

(1.1)+(1.2) donne

$$2x=0 \Leftrightarrow x=0 \ (3) \qquad (1.3)$$

(1.3) dans (1.1) donne $0-y=0 \Leftrightarrow y=0$

D'où $\vec{u}=\vec{0}$ et $\ker f=\{\vec{0}\}$. Qui correspond à la réponse a.

4.2. $g(\vec{u})=(-x-y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$

$\Rightarrow g(\vec{i})=-\vec{i}+\vec{j}$ et $g(\vec{j})=-\vec{i}-\vec{j}$

D'où la matrice est $M_g=\begin{pmatrix}-1 & -1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Qui correspond à la réponse a.

Rappel : si $g(\vec{i})=a\vec{i}+b\vec{j}$ et $g(\vec{j})=c\vec{i}+d\vec{j}$ alors $M_g=\begin{pmatrix}a & c \\ b & d\end{pmatrix}$

4.3. $(P): x-2y+z+2=0$ et $(P'): x+y+z+2=0$

Donc $\vec{n}(1,-2,1)$ et $\vec{n'}(1,1,1)$ sont respectivement des vecteurs normaux à (P) et (P').

En plus $\vec{n}\cdot\vec{n'}=1\times1-2\times1+1\times1=0$ donc $(P)\perp(P')$

Qui correspond à la réponse b.

4.4.

$$\begin{aligned} & \left\|3\vec{MA}-\vec{MB}\right\|=\left\|\vec{MA}+\vec{MB}\right\| \\ \Leftrightarrow & \left\|3(\vec{MG}+\vec{GA})-(\vec{MG}+\vec{GB})\right\|= \\ & \left\|\vec{MI}+\vec{IA}+\vec{MI}+\vec{IB}\right\| \\ \Leftrightarrow & \left\|3\vec{MG}-\vec{MG}+3\vec{GA}-\vec{GB}\right\|= \\ & \left\|2\vec{MI}+\vec{IA}+\vec{IB}\right\| \end{aligned}$$

Or $3\vec{GA}-\vec{GB}=\vec{0}$ et $\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{0}$ car $G=\text{bar}\{(A,3),(B,-1)\}$ et $I=\text{bar}\{(A,1),(B,1)\}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \left\|2\vec{MG}\right\|=\left\|2\vec{MI}\right\| \\ \Leftrightarrow & \left\|\vec{MG}\right\|=\left\|\vec{MI}\right\| \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la matrice de $[GI]$.

Qui correspond à la réponse c.

4.5. $(C): (x-1)^2+(y+1)^2=4$ est le cercle de centre $G(1,-1)$ et de rayon $r=2$.

$$\begin{aligned} d(G,(D)) &= \frac{|3\times1+4\times(-1)+11|}{\sqrt{3^2+4^2}} \\ &= \frac{|3-4+11|}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{|10|}{5}=2=r \end{aligned}$$

Donc (C) et (D) sont tangents. Qui correspond à la réponse b.

Rappels :

i Si (D) est une droite d'équation $ax+by+c=0$ et $A_0(x_0,\ y_0)$ un point du plan, alors la distance de A_0 à (D) est donné par $d(A_0,\ (D))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ii Si (C) est un cercle de centre O et de rayon r et (D) une droite alors

- Si $d(0,\ (D))<r$, alors (D) et (C) se coupent en deux points : on dit qu'ils sont sécants.
- Si $d(0,\ (D))=r$, alors (D) et (C) se coupent en un seul point : on dit qu'ils sont tangents.
- Si $d(0,\ (D))>r$, alors (D) et (C) ne se touchent pas : ils sont disjoints.

Solution 5. (p. 3)

5.1. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x \sin x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}\sin 16x$$

On sait que

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

D'où

$$\cos x \sin x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x$$

De même

$$\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 4x \cos 4x \cos 8x$$

et

$$\sin 4x \cos 4x = \frac{1}{4}\sin 8x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 4x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 8x \cos 8x$$

Puis $\sin 8x \cos 8x = \frac{1}{2}\sin 16x$
D'où

$$\begin{aligned}\cos x \sin x \cos 2x \cos 4x \cos 8x &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 16x\\ &= \frac{1}{16}\sin 16x\end{aligned}$$

5.2. Déduisons que

$$\cos\frac{\pi}{32}\sin\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}$$

En remplaçant x par $\frac{\pi}{36}$ dans le résultat de la question précédente,
On obtient :

$$\cos\frac{\pi}{32}\sin\frac{\pi}{32}\cos 2\times\frac{\pi}{32}\cos 4\times\frac{\pi}{32}\cos 8\cdot\frac{\pi}{32} = \frac{1}{16}\sin\left(16\times\frac{\pi}{32}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{32}\sin\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{16}$$

car $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

5.3. $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

5.3.1. Calculons $p(-1)$

$$\begin{aligned}p(-1) &= 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + (-1) - 2\\ &= -2+5-1-2\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $x+1$ est un facteur de $p(x)$
$\Rightarrow$ $\exists q$, polynôme du second degré, tel que $p(x) = (x+1)q(x)$
q étant du second degré, est sous la forme $q(x) = ax^2 + bx + c$
Déterminons $q(x)$.

- *Méthode 1* : Division euclidienne

$$\begin{array}{l} \left(2x^3+5x^2+x-2\right)\div\left(2x^2+3x-2\right) = x+1\\ \underline{-2x^3-3x^2+2x}\\ \qquad 2x^2+3x-2\\ \qquad \underline{-2x^2-3x+2}\\ \qquad\qquad 0\end{array}$$

D'où $p(x) = (x+1)\left(2x^2+3x-2\right)$

- *Méthode 2* : Par identification
  Déterminons les réels a, b et c tels que $p(x) = (x+1)\left(ax^2+bx+c\right)$

$$\Leftrightarrow 2x^3+5x^2+x-2 = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2\\ a+b=5\\ b+c=1\\ c=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2\\ b=5-a=3\\ c=1-b=1-3=-2\\ c=-2\end{cases}$$

Ainsi $p(x) = (x+1)\left(2x^2+3x-2\right)$

5.3.2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\sin^3 2x + 5\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$.
Posons $X = \sin 2x$
Alors $2X^3+5X^2+X-2=0$
$\Leftrightarrow (X+1)\left(2X^2+3X-2\right) = 0$, d'après la question précédente
$\Leftrightarrow X+1=0$ ou $2X^2+3X-2=0$
$\Leftrightarrow X=-1$ ou $2X^2+3X-2=0$
Résolvons $2X^2+3X-2=0$
$\Delta = 9-4\times2\times(-2) = 9+16 = 25 = 5^2$
$\Leftrightarrow X = \frac{-3-5}{4} = -2$ ou $X = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$
D'où $X=-1$ ou $X=-2$ ou $X=\frac{1}{2}$
Or $\sin 2x = X$
$\Leftrightarrow \sin 2x = -1$ ou $\sin 2x = -2$ ou $\sin 2x = \frac{1}{2}$
Or $\sin 2x = -2$ est impossible car $\forall \alpha \in \mathbb{R}; -1 \le \sin\alpha \le 1$
$\Leftrightarrow \sin 2x = -1$ ou $\sin 2x = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ou $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}$
$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$ ou $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi; (k\in\mathbb{Z})$
Ainsi l'ensemble solution de l'équation est

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi;\ \frac{3\pi}{4}+k\pi;\ \frac{\pi}{12}+k\pi;\ \frac{5\pi}{12}+k\pi : (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

1

Solution 6. (p. 3)

Problème

6.1. Partie A

6.1.1. Limites de f aux bornes de son domaine de définition.

$f(x)$ existe si et seulement si $2(x-1)\neq 0 \iff x\neq 1$

Donc $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2(x-1)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x}\\ &= \lim_{n\to-\infty}\frac{x}{2}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2(x-1)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{2(x-1)}\\ &= \frac{1}{2\times 0^-}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{2(x-1)}\\ &= \frac{1}{2\times 0^+}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

6.1.2. Dérivée de f.

f est dérivable sur son domaine de définition car f est une fonction rationnelle

$\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x^2)'\big(2(x-1)\big) - x^2\big(2(x-1)\big)'}{\big(2(x-1)\big)^2}\\ &= \frac{2x\times 2(x-1)-2x^2}{4(x-1)^2}\\ &= \frac{4x^2-4x-2x^2}{4(x-1)^2}\\ &= \frac{2x^2-4x}{4(x-1)^2}\\ &= \frac{2x(x-2)}{4(x-1)^2}\\ &= \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}\end{aligned}$$

- Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

Ainsi f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2, +\infty[$

Et f est décroissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, 2[$.

- Tableau de variations

  On déduit de ce qui précède le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

6.1.3. Montrons que (C) admet une asymptote verticale et une asymptote oblique.

- Puisque $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

  Alors (C) admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote vertical

-

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2}{2(x-1)}\\ &= \frac{x^2-1+1}{2(x-1)}\\ &= \frac{x^2-1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)}\\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)}\\ &= \frac{x+1}{2} + \frac{1}{2(x-1)}\\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(x-1)}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x) - \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2(x-1)}$$

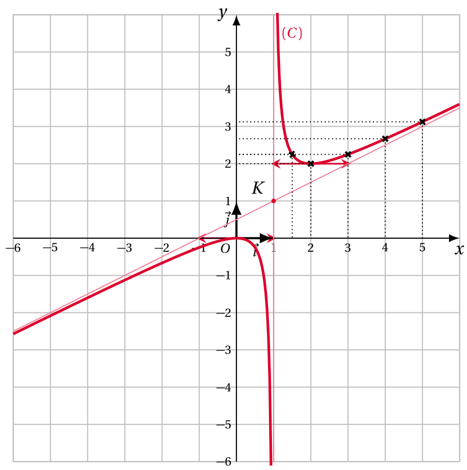
$$\begin{aligned}\iff \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2(x-1)}\\ &= 0\end{aligned}$$

D'où la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.

6.1.4. Traçons (C) et ses asymptotes

Quelques valeurs particulières

x	1,5	3	4	5
$f(x)$	2,25	2,25	2,67	3,125



6.1.5. Montrons que $K(1,1)$ est le centre de symétrie de (C)
Il suffit de montrer que $\forall\ x$, tel que $1+x$ et $1-x \in D_f$, on a $f(1+x)+f(1-x)=2\times 1$
On a

$$\begin{aligned}
f(1+x)+f(1-x) &= \frac{(1+x)^2}{2(1+x-1)}+\frac{(1-x)^2}{2(1-x-1)}\\
&= \frac{1+2x+x^2}{2x}+\frac{1-2x+x^2}{-2x}\\
&= \frac{1+2x+x^2}{2x}+\frac{-1+2x-x^2}{2x}\\
&= \frac{1+2x+x^2-1+2x-x^2}{2x}\\
&= \frac{4x}{2x}\\
&= \frac{4x}{2x}\\
&= 2
\end{aligned}$$

D'où $K(1,1)$ est le centre de symétrie de (C)

6.1.6. Discutons graphiquement l'existence et le nombre de solutions de l'équation $x^2+2mx-2m=0$

$$\begin{aligned}
& x^2+2mx-2m=0\\
\Leftrightarrow\ & -2m(x-1)=x^2\\
\Leftrightarrow\ & -2m=\frac{x^2}{x-1}\\
\Leftrightarrow\ & -m=\frac{x^2}{2(x-1)}\\
\Leftrightarrow\ & f(x)=-m
\end{aligned}$$

Il suffit donc de discuter l'existence et le nombre de points d'intersection de (C) et la droite d'équation $y=-m$
En procédant graphiquement nous obtenons la solution suivante :

- Si $m\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]0,+\infty[$, alors l'équation admet 2 solutions distinctes.
- Si $m\in\{-2;0\}$, l'équation admet une seule solution.
- Si $m\in\,]2,0[$, l'équation n'admet aucune solution.

6.2. Partie B

$u_2=4;\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2(u_n-1)}$

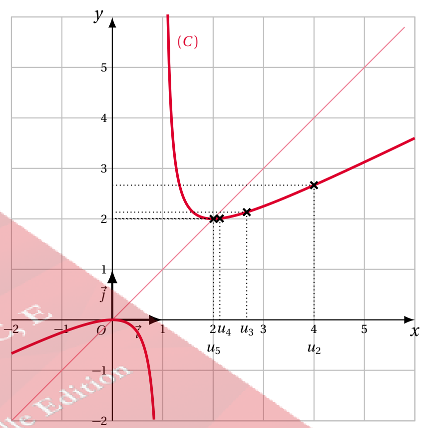
6.2.1. Calculons u_3, u_4 et u_5

$$\begin{aligned}
u_3 &= \frac{{u_2}^2}{2(u_2-1)}\\
&= \frac{4^2}{2(4-1)}=\frac{16}{2\times 3}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4 &= \frac{{u_3}^2}{2(u_3-1)}\\
&= \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2}{2\left(\left(\frac{8}{3}\right)-1\right)}=\frac{\frac{64}{9}}{2\times\frac{5}{3}}=\frac{32}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_5 &= \frac{{u_4}^2}{2(u_4-1)}\\
&= \frac{\left(\frac{32}{15}\right)^2}{2\left(\left(\frac{32}{15}\right)-1\right)}=\frac{\frac{32^2}{15^2}}{2\times\frac{17}{15}}=\frac{512}{255}
\end{aligned}$$

6.2.2. Plaçons u_2, u_3, u_4 et u_5 sur le graphique de la fonction.



6.2.3. Par conjecture, d'après la représentation précédente, (u_n) est décroissante

1.2.3 Solution – Probatoire 2014

Solution 7. (p. 3)

7.1. 7.1.1. Calculons $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\times\sqrt{3}\times 1 + 1^2}{4}$$
$$= \frac{3-2\sqrt{3}+1}{4}$$
$$= \frac{4-2\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

7.1.2. Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} a+b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ ab = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

On sait que, si S et P sont deux réels tels que $a+b=S$ et $ab=P$, alors a et b sont des solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$.
Donc pour notre cas a et b sont solution de

$$x^2 - \frac{\sqrt{3}+1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

Résolvons (**7.1.2.**) en utilisant le discriminant

$$\Delta = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$$

D'où $x = \dfrac{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$

ou $x = \dfrac{\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D'où : soit $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $b = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$
L'ensemble solution du système est donc

$$S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

7.1.3. Déduisons dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, les solutions (x, y) du système

$$\begin{cases} 2\sin x + 2\sin y = \sqrt{3}+1 \\ \sin x \times \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin x + 2\sin y = \sqrt{3}+1 \\ \sin x \times \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\sin x + \sin y\right) = \sqrt{3}+1 \\ \sin x \times \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sin x \times \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Posons $a = \sin x$ et $b = \sin y$

Alors le système devient $\begin{cases} a+b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ ab = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ qui est le système de la question précédente.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ou; } \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \\ y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

7.2. 7.2.1. Déterminons le noyau $\ker f$ de f

■ *Méthode 1* :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (E)$

et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f(\vec{u})$

$$\vec{u}' = f(\vec{u})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

$\vec{u} \in \ker f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}' = \vec{0}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 0 & (1.1) \\ \sqrt{3}x + y = 0 & (1.2) \end{cases}$$

$(1.1) \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}y$
En remplaçant dans (1.2) on obtient

$$\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}y\right) + y = 0$$
$$\Leftrightarrow -3y + y = 0$$
$$\Leftrightarrow -2y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0$$

D'où $x = -\sqrt{3}y = \sqrt{3} \times 0 = 0$
Ainsi $\vec{u} = \vec{0}$
D'où $\ker f = \{\vec{0}\}$

■ *Méthode 2* :

Comme $\det M = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0,$

Alors f est un isomorphisme. D'où $\ker f = \{\vec{0}\}$
Déterminons l'image $\mathfrak{I}f$
Comme $\ker f = \{\vec{0}\}$, alors $\mathfrak{I}f = E$

7.2.2. Justifions que M' est la matrice inverse de M.
Il suffit de montrer que $MM' = M'M = I$

$$\begin{aligned} M' &= 2M - 2I \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} MM' &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

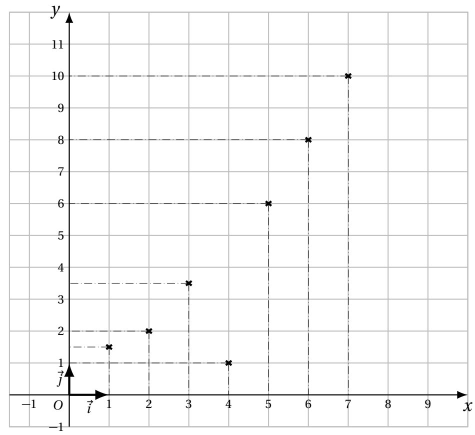
Et

$$\begin{aligned} MM' &= \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$MM' = M'M = I$ d'où M' est la matrice inverse de M.

Solution 8. (p. 4)

8.1. Nuage des points



8.2. 8.2.1. Covariance de la série
Les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ des séries X et Y sont :

$$\overline{X} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$$

$$\overline{Y} = \frac{1,5+2+3,5+1+6+8+10}{7} \approx 4,571$$

D'où

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,\ Y) &= \frac{1}{N}\sum X_i Y_i - \overline{X}\,\overline{Y} \\ &= \frac{1}{7}\big[1\times 1,5 + 2\times 2 + 3\times 3,5 + \\ &4\times 1 + 5\times 6 + 6\times 8 + 7\times 10\big] - \\ &4\times 4,571 \\ &= 5,716 \approx 5,72 \end{aligned}$$

8.2.2. On donne $\overline{Y} = 4,571$, $V(x) = 4$ et $V(Y) = 10,46$

8.2.2.1. Calculons le coefficient de corrélation r

$r = \dfrac{\sigma(XY)}{\sigma(x)\cdot\sigma(Y)}$

Or $\sigma(XY) = \sqrt{\operatorname{cov}(X,Y)}$, $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$ et $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$

D'où

$$r = \frac{\sqrt{5,72}}{\sqrt{4\times 10,46}} \approx 0,37$$

8.2.2.2. Justifions qu'une droite de régression de Y en X est : $y = 1,43x - 1,15$

On sait qu'une droite de régression de Y en X est donnée par la relation $y - \overline{y} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(x)}(x - \overline{x})$

$$\Leftrightarrow y - 4,57 = \frac{5,72}{4}(x-4)$$

$$\Leftrightarrow y = 1,43x - 1,15$$

8.2.3. Estimation du nombre de personnes qui visiteront ce site en l'année de rang 31
Lorsque $x = 31$; $y = 1,43\times 31 - 1,15 = 43,18$
En l'année de rang 31, environ 43 180 personnes visiteront ce site.

8.3. 8.3.1. Le nombre N_1 de façon de parcourir les 5 escales
Il suffit d'arranger les 5 escales (puisque chaque escale

est obligatoire et on ne peut passer par chacune qu'une seule fois).
Donc $N_1 = A_5^5 = 5! = 120$
Il y'a donc 120 façons distinctes de parcourir les 5 escales.

8.3.2. Nombre N_2 de façon de parcourir les 5 escales si on commence toujours par l'escale A.
Si on commence toujours par l'escale A, il ne reste qu'à parcourir les 4 autres escales. De même qu'à la question précédente

$$N_2 = A_4^4 = 4! = 24$$

Solution 9. (p. 4)

Problème

9.1. Partie A

9.1.1. Déterminons la mesure principale θ de l'angle de r.
Comme $r(A) = D$ et $r(M) = N$
$\Rightarrow \theta = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{DN}}\right) = -\frac{\pi}{2}$

9.1.2. 9.1.2.1. Montrons que $OM^2 = 18 - 6AM + AM^2 = ON^2$

$$\begin{aligned}
OM^2 = \vec{OM}^2 &= \left(\vec{OA} + \vec{AM}\right)^2 \\
&= OA^2 + AM^2 + 2\vec{OA}\cdot\vec{AM} \\
&= OA^2 + AM^2 + 2OA\cdot AM\cos\left(\widehat{\vec{OA}, \vec{AM}}\right) \\
&= OA^2 + AM^2 + 2OA\cdot AM\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= OA^2 + AM^2 - 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}OA\times AM
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
OA &= \frac{1}{2}AC \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}AB \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\times 6 \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
OM^2 &= \left(3\sqrt{2}\right)^2 + AM^2 - \sqrt{2}\times\left(3\sqrt{2}\right)AM \\
&= 18 - 6AM + AM^2
\end{aligned}$$

De même en calculant ON en prenant $ON^2 = \left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DN}\right)^2$ on obtient

$$ON^2 = 18 - 6DN + DN^2$$

Or $AM = DN$
D'où $OM^2 = 18 - 6AM + AM^2 = ON^2$

9.1.2.2. Déduisons que O est le centre de r

Comme r est la rotation d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et qui transforme M en N, il suffit de montrer que $OM = ON$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) = -\frac{\pi}{2}$
Or à la question précédente, nous avons établi que $OM^2 = ON^2$ (donc $OM = ON$). Il ne reste plus qu'à vérifier que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) = -\frac{\pi}{2}$
On a $AO = OD$, $AM = DN$ et $OM = ON$
Donc les triangles AOM et DON sont superposables
D'où

$$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{ON}}\right) \qquad (1.1)$$

Or

$$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OD}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{ON}}\right) \qquad (1.2)$$

Aussi

$$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OD}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OD}}\right) = -\frac{\pi}{2} - \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right) \qquad (1.3)$$

(1.1) et (1.3) dans (1.2) donne
$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) = -\frac{\pi}{2} - \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$
D'où $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) = -\frac{\pi}{2}$
Donc O est le centre de r.

9.1.3. 9.1.3.1. Déterminons k en fonction de x

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{DM} = k\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}\right) \\
&\Rightarrow \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{DA} = -k\overrightarrow{AD} \\
&\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{AM} = -k\overrightarrow{AD} \\
&\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{AM} = -k\overrightarrow{AD} \\
&\Rightarrow (1-k)x = -6k \\
&\Rightarrow x - kx = -6k \\
&\Rightarrow (x-6)k = x
\end{aligned}$$

$$k = \frac{x}{x-6}$$

Déduisons que $M = \text{bar}\{(A,\ 6-x),\ (D,\ x)\}$
On a $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{DM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{DM} = \vec{0}$
Or

$$\begin{aligned}
&k = \frac{x}{x-6} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \frac{x}{x-6}\overrightarrow{DM} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow (x-6)\overrightarrow{AM} - x\overrightarrow{DM} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow (6-x)\overrightarrow{AM} + x\overrightarrow{DM} = \vec{0}
\end{aligned}$$

D'où

$$M = \text{bar}\{(A,\ 6-x), (D,\ x)\}$$

9.1.3.2. Vérifions que

$$(7-x)\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+x\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+(6-x)\overrightarrow{GA}+x\overrightarrow{GD}$$

$$\begin{aligned}(7-x)\vec{GA}+\vec{GB}+x\vec{GD}&=\left[1+(6-x)\right]\vec{GA}+\\&\quad\vec{GB}+x\vec{GD}\\&=\vec{GA}+(6-x)\vec{GA}+\\&\quad\vec{GB}+x\vec{GD}\\&=\vec{GA}+\vec{GB}+\\&\quad(6-x)\vec{GA}+x\vec{GD}\end{aligned}$$

Déduisons que G est le barycentre de M et I affectés des coefficients à déterminer
Comme $G=\text{bar}\left\{(A,7-x),(B,1),(D,x)\right\}$,
Alors $(7-x)\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+x\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+(6-x)\overrightarrow{GA}+x\overrightarrow{GD}=\vec{0} \qquad (1.4)$$

Or

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}&=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}\\&=2\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\\&=2\overrightarrow{GI} \qquad (1.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6-x)\overrightarrow{GA}+x\overrightarrow{GD}&=(6-x)\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}\right)+\\&\quad x\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MD}\right)\\&=(6-x)\overrightarrow{GM}+x\overrightarrow{GM}+\\&\quad(6-x)\overrightarrow{MA}+x\overrightarrow{MD}\\&=(6-x+x)\overrightarrow{GM}\end{aligned}$$

car $(6-x)\overrightarrow{MA}+x\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$$=6\overrightarrow{GM} \qquad (1.6)$$

(1.5) et (1.6) dans (1.4) donne

$$\begin{aligned}&2\overrightarrow{GI}+6\overrightarrow{GM}=\vec{0}\\\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{GI}+3\overrightarrow{GM}=\vec{0}\end{aligned}$$

D'où

$$G=\text{bar}\left\{(I,1),(M,3)\right\}$$

9.1.3.3. Justifions que $\overrightarrow{G'J}=\frac{3}{4}\overrightarrow{NJ}$.
Comme une rotation conserve le barycentre alors $J=r(I)$ et $G'=\text{bar}\left\{\left(r(I),1\right),\left(r(M),3\right)\right\}=\text{bar}\left\{(J,1),\,(N,3)\right\}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \overrightarrow{G'J}+3\overrightarrow{G'N}=\vec{0}\\&\Rightarrow \overrightarrow{G'J}+3\overrightarrow{G'J}+3\overrightarrow{JN}=\vec{0}\\&\Rightarrow 4\overrightarrow{G'J}=3\overrightarrow{NJ}\\&\Rightarrow \overrightarrow{G'J}=\frac{3}{4}\overrightarrow{NJ}\end{aligned}$$

9.1.4. 9.1.4.1. Expression des aires de IAM et MDN en fonction x
$A(IAM)=\dfrac{AI\times AM}{2}=\dfrac{3\times x}{2}=\dfrac{3}{2}x$ car $AI=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{6}{2}=3$
$A(MDN)=\dfrac{DM\times DN}{2}=\dfrac{(AD-AM)\times AM}{2}$ car $DN=AM$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A(MDN)&=\frac{(6-x)\times x}{2}\\&=\frac{x(6-x)}{2}\\&=-\frac{1}{2}x^2+3x\end{aligned}$$

9.1.4.2. Montrons que $A_1=27-3x$

$$\begin{aligned}A_1&=A(BCNI)\\&=\frac{(BI+CN)\times BC}{2}\\&=\frac{(3+6-x)\times 6}{2}\\&=3(9-x)=27-3x\end{aligned}$$

9.1.4.3. Déduisons en que $A=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+9$

$$\begin{aligned}A&=A(IMN)\\&=A(ABCD)-A(IAM)-A(MDN)-A(BCNI)\\&=6\times6-\frac{3}{2}x-\left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right)-(27-3x)\\&=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+9\end{aligned}$$

9.2. Partie B

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+9 \text{ sur } [0,6]$$

9.2.1. Limites de f aux bornes de son ensemble de définition $D_f=[0,6]$
$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=9$
$\lim_{x\to6}\ f(x)=f(6)=\frac{1}{2}\times36-\frac{3\times6}{2}+9=18-9+9=18$

9.2.2. 9.2.2.1. Etude des variations de f
f est dérivable sur D_f et $\forall x\in D_f\,;\,f'(x)=x-\dfrac{3}{2}$
$f'(x)\geq0 \iff x\geq\dfrac{3}{2}$
Donc f est décroissante sur $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{3}{2},6\right]$
Tableau de variations de f

x	0		$\frac{3}{2}$		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	$\searrow$	$\frac{63}{8}$	$\nearrow$	18

9.2.2.2. Déduisons en que $\forall x\in[0,6],\ \ f(x)\geq f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

- f est décroissante sur $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$. Donc $\forall\ x\ \in\left[0,\ \dfrac{3}{2}\right]$, comme $x\leq\dfrac{3}{2}$, $f(x)\geq f\left(\dfrac{3}{2}\right)$
- f est croissante sur $\left[\dfrac{3}{2},\ 6\right]$. Donc $\forall\ x\in\left[\dfrac{3}{2},6\right]$, comme $x\geq\dfrac{3}{2}$, $f(x)\geq f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

Ainsi $\forall x \in [0,6]$, $f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$

9.2.2.3. Valeur de x pour laquelle l'aire du triangle IMN est minimale

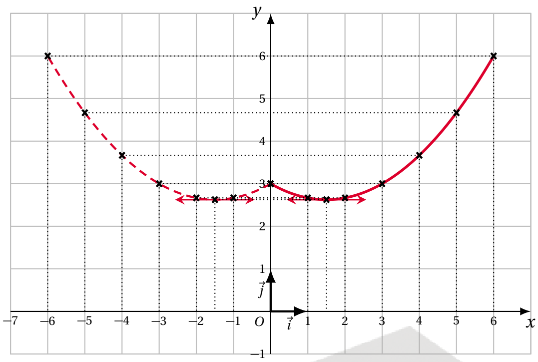
$$A(IMN) = f(x)$$

Donc l'aire de IMN est minimal lorsque $f(x)$ l'est aussi
Or d'après la question précédente, $\forall\ x \in [0,6]$, $f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$

Donc $f(x)$ est minimale pour $x = \frac{3}{2}$

9.2.3. Représentation de f
Tableau de valeurs particulières

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	8	8	9	11	14



9.2.4. 9.2.4.1. Continué et dérivabilité de g en 0

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} f(|x|)\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}|x|^2 - \frac{3}{2}|x| + 9\\ &= 9 = f(0) = g(0)\end{aligned}$$

D'où g est continue en 0.

$$\begin{aligned}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \frac{\frac{1}{2}|x|^2 - \frac{3}{2}|x| + 9 - 9}{x}\\ &= \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}|x|}{x}\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\cdot\frac{|x|}{x}\\ &= \begin{cases}\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si} x < 0\\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & \text{si} x > 0\end{cases}\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

Comme ces deux limites sont différentes, g n'est pas dérivable en 0

9.2.4.2. Justifions que f est paire
Le domaine de définition de g est $D_g = [-6,6]$
Donc $\forall x \in D_g, -x \in D_g$
Et $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$
D'où g est paire

9.2.4.3. Déduisons la courbe de g (voir le graphique ci-dessus)
N.B : pour construire la courbe de g

- On conserve la partie de la courbe de f pour les $x \geq 0$
- On fait la symétrie de cette partie par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir la partie pour les $x < 0$

1.2.4 Solution – Probatoire 2015

Solution 10. (p. 5)

10.1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$.
Nous allons d'abord calculer le discriminent :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4\times 4\times(-1)\\ &= 4 + 16 = 20 = 5\times 2^2\\ &= \left(2\sqrt{5}\right)^2\end{aligned}$$

D'où $x = \frac{2-2\sqrt{5}}{2\times 4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ ou $x = \frac{2+2\sqrt{5}}{2\times 4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$
L'ensemble solution de l'équation est donc :

$$S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{4}; \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$$

10.2. Exprimons $\sin\frac{2\pi}{5}$ en fonction de x et y
On sait que $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
Donc

$$\sin\frac{2\pi}{5} = 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = 2xy$$

10.3. 10.3.1. Justifions que $\cos\frac{2\pi}{5} = 1 - 2y^2 = 2x^2 - 1$.
On sait que $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
Donc

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{5} &= 1 - 2\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2\\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2 - 1\\ &= 1 - 2y^2 = 2x^2 - 1\end{aligned}$$

10.3.2. Déduisons que $\sin\frac{3\pi}{5} = y\left(4x^2 - 1\right)$

$$\sin\frac{3\pi}{5} = \sin\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right)$$

Or on sait que $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

D'où

$$\begin{aligned}\sin\frac{3\pi}{5} &= \sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}\\ &= 2xy\times x+\left(2x^2-1\right)y\\ &= y\left(2x^2+2x^2-1\right)\\ &= y\left(4x^2-1\right)\end{aligned}$$

10.4. 10.4.1. Justifions que $\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{5}$

$$\begin{aligned}\sin\frac{2\pi}{5} &= \sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)\\ &= \sin\frac{3\pi}{5}\end{aligned}$$

car $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha;\ \forall\alpha$

10.4.2. Déduisons que $4x^2-2x-1=0$

D'après **10.3.2.** $\sin\frac{3\pi}{5}=y\left(4x^2-1\right)$

Or d'après **10.4.1.** $\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{5}=2xy$

D'où

$$\begin{aligned}&2xy=y\left(4x^2-1\right)\\ \Rightarrow\ & y\left(4x^2-1\right)-2xy=0\\ \Rightarrow\ & y\left(4x^2-2x-1\right)=0\\ \Rightarrow\ & y=0 \text{ ou } 4x^2-2x-1=0\end{aligned}$$

Or $y=\sin\frac{\pi}{5}\neq 0$

D'où $4x^2-2x-1=0$

10.4.3. Déduisons que $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

D'après la question précédente, $x=\cos\frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2-2x-1=0$ que nous avons résolue à la question **10.1.** et dont les solutions sont $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Or $\pi\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\frac{\pi}{5}>0$ et $\sin\frac{\pi}{5}>0$

D'où $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

- Déduisons : $\sin\frac{\pi}{5}$

  On sait que $\cos^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{\pi}{5}=1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{5} &= 1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\\ &= 1-\frac{1+5+2\sqrt{5}}{16}\\ &= \frac{10-2\sqrt{5}}{16}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \text{ ou } \sin\frac{\pi}{5}=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Or $\sin\frac{\pi}{5}>0$

D'où $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

Solution 11. (p. 5)

11.1. Justifions que x et y vérifient le système

$$\begin{cases}43x+75y=3700\\ x+y=60\end{cases}$$

- On sait que l'effectif total est $10+x+y+30$
  Or étant donné que l'enquête porte sur 100 personnes l'effectif total est égal à 100.
  D'où

$$\begin{aligned}&10+x+y+30=100\\ \Rightarrow\ & x+y=60\end{aligned}$$

- La moyenne

$$\begin{aligned}M &= \frac{\sum x_i n_i}{N}\\ &= \frac{10\times1500+x\times4300+y\times7500+30\times10500}{100}\\ &= 150+43x+75y+3150\\ &= 43x+75y+3300\end{aligned}$$

  Or, par hypothèse, $M=7000$
  D'où

$$43x+75y=3700$$

  x et y vérifient donc le système $\begin{cases}43x+75y=3700\\ x+y=60\end{cases}$

11.2. Déduisons les valeurs de x et y

Il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases}43x+75y=3700 & (1.1)\\ x+y=60 & (1.2)\end{cases}$$

- *Méthode 1* : par substitution
  $(1.2)\Rightarrow\ y=60-x$
  En remplaçant dans (1.1) on obtient :

$$\begin{aligned}&43x+75(60-x)=3700\\ \Rightarrow\ & -32x+4500=3700\\ \Rightarrow\ & 32x=800\\ \Rightarrow\ & x=25\end{aligned}$$

  D'où $y=60-25=35$
- *Méthode 2* : par combinaison
  $(1.1)-43\times(1.2)$ donne

$$\begin{aligned}&43x-43x+75y-43y=3700-60\times43\\ \Rightarrow\ & 32y=1120\\ \Rightarrow\ & y=35\end{aligned}$$

  $(1.1)-75\times(1.2)$ donne

$$\begin{aligned}&43x-75x+75y-75y=3700-75\times60\\ \Rightarrow\ & -32x=-800\\ \Rightarrow\ & x=25\end{aligned}$$

- *Méthode 3* : calcul du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 43 & 75 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 43 - 75 = -32$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3700 & 75 \\ 60 & 1 \end{vmatrix} = -800$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 43 & 3700 \\ 1 & 60 \end{vmatrix} = -1120$$

D'où $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-800}{-32} = 25$ et $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-1120}{-32} = 35$

11.3. 11.3.1. Nombre N de façons qu'on peut choisir le groupe à primer.
Le choix des 5 personnes à primer (parmi les 30 possibles) peut être assimilé à un tirage simultané de 5 personnes parmi 30.
Le nombre de possibilité est donc $N = C_{30}^{5} = 142506$

11.3.2. Nombre N_2 de façons d'attribuer les prix.
On a 5 personnes à qui on veut attribuer 7 prix identiques de manière à ce que chaque personne ait au moins un prix :
On peut donc avoir

- Soit 3 personnes ayant 1 prix et 2 autres ayant 2 prix chacun : il suffit dans ce cas de choisir 3 personnes sur 5 et 2 personnes sur les 2 restantes.
- Soit 4 personnes ayant 1 prix et l'autre ayant 3 prix (il suffit de choisir 4 personnes parmi 5 et 1 parmi les 1 restante).

Donc $N_2 = C_5^3 \times C_2^2 + C_5^4 \times C_1^1 = 15$

Solution 12. (p. 5)

Problème

12.1. Partie A

12.1.1. Justifions que les droites (SA) et (BC) sont orthogonales.
Par hypothèse la droite (SA) est orthogonale au plan (ABC).
Or la droite (BC) est une droite de (ABC) donc les droites (SA) et (BC) sont orthogonales.

12.1.2. 12.1.2.1. Montrons que (IM) est parallèle au plan (SAC).
Il suffit de montrer que $(IM)//(SA)$.
Nous allons procéder par l'absurde.
Supposons que les droites (IM) et (SA) ne sont pas parallèles.
Alors étant donné que ces droites sont dans le même plan (SAB), elles se touchent en un point N.
Or $(SA)\perp(AB)$ et $(MI)\perp(AB)$.
$\Rightarrow$ $(NA) \perp (AB)$ et $(NM) \perp (AB)$ car $(NA) = (SA)$ et $(NM) = (MI)$, puisque $N \in (SA)$ et $N \in (MI)$.
Donc N, A et M sont tous des points de la même droite (la droite du plan SAB, passant par N et perpendiculaire à (AB)).

$$\Rightarrow N \in (MA)$$

Or le seul point de (IM) qui appartient à (AB) est le point M et le seul point de (SA) qui appartient à (AB) est le point A.
$\Rightarrow$ $N = M$ et $N = A$
$\Rightarrow$ $M = A$ absurde car par hypothèse on a dit que $M \neq A$
D'où $(IM)//(SA)$ et par conséquent $(IM)//(SAC)$

- Déduisons que $(IM)//(KJ)$
  On a $(IM)//(SAB)$ et $(IM)\subset(P)$
  $\Rightarrow$ $(IM)//(SAB)$ et $(IM)//(P)$
  $\Rightarrow$ $(IM)//(SAB)\cap(P)$
  Or $(SAB)\cap(P) = (KJ)$
  $\Rightarrow (IM)//(KJ)$

12.1.2.2. Montrons que $(MJ)//(BC)$
$(P)\perp(AB) \Rightarrow (MJ)\perp(BC)$
Car deux droites du même plan qui sont perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

- Déduisons que $(MJ)//(IK)$
  (MJ) // (BC) $\Rightarrow$ (MJ) // (SBC) Or $(MJ)\subset(P) \Rightarrow (MJ)//(P)$
  D'où $(MJ)//(SBC)\cap(P)$; Or $(SBC)\cap(P) = (IK)$
  $\Rightarrow$ $(MJ)//(IK)$

12.1.2.3. Justifions que $IKJM$ est un rectangle.
Nous avons obtenu aux questions **12.1.2.1.** et **12.1.2.2.** précédentes que $(IM)//(KJ)$ et que $(MJ)//(IK)$. Nous pouvons déjà dire que $IKJM$ est un parallélogramme.
En plus $(IM)//(SA)$ et $(SA)\perp(ABC)$.
$\Rightarrow$ $(IM)\perp(ABC)$.
$\Rightarrow$ $(IM)\perp(MJ)$ car $(MJ)\subset(ABC)$.
D'où $IKJM$ est un parallélogramme ayant un angle droit c'est donc un rectangle. $IKJM$ est un rectangle son aire $S(x) = MJ \times IM$
Comme $(MJ)//(BC)$, d'après la propriété de Thalès.
On a $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MJ}{BC} \Leftrightarrow MJ = \dfrac{AM}{AB} \times BC = \dfrac{x \times 4}{3} = \dfrac{4}{3}x$
Aussi comme $(IM)//(SA)$, on a de même
$\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{IM}{SA} \Leftrightarrow IM = \dfrac{SA \times BM}{BA} = \dfrac{SA(BA - AM)}{BA} = \dfrac{4(3-x)}{3}$
D'où

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{4}{3}x \times \frac{4(3-x)}{3} \\ &= \frac{16x(3-x)}{9} \\ &= \frac{16}{9}\left(-x^2 + 3x\right) \end{aligned}$$

12.2. Partie B

$$f(x) = -x^2 + 3x \text{ sur } [0,3]$$

12.2.1. Étudions les variations de f.
Le domaine de définition de f est $D_f = [0,3]$.
Et $\forall\, x \in D_f$,

$$f'(x) = -2x + 3 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Donc

$$\forall x > \frac{3}{2},\ f'(x) < 0$$

$$\forall x < \frac{3}{2},\ f'(x) > 0$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

D'où f est croissante sur $\left[0, \dfrac{3}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{3}{2}, 3\right]$.

12.2.2. Tableau de variations de f.

$f(0) = 0,\ f(3) = 0,\ f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4} = 2,25$

On a donc

x	0		$\frac{3}{2}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0

12.2.3. 12.2.3.1. Vérifions que $S(x) = \frac{16}{9} f(x)$.

Nous avons obtenu à la partie A que $S(x) = \frac{16}{9}\left(-x^2 + 3x\right) = \frac{16}{9} f(x)$.

12.2.3.2. Déduisons la valeur de x pour laquelle l'aire de $S(x)$ est maximale.

Puisque $S(x) = \frac{16}{9} f(x)$.

$S(x)$ et $f(x)$ ont le même sens de variations.

$S(x)$ est maximal lorsque $f(x)$ l'est aussi.

D'après le tableau de variations de f, $f(x)$ est maximal pour $x = \frac{3}{2}$ et son maximum est $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$.

D'où $S(x)$ est maximal pour $x = \frac{3}{2}$ et son maximum est $S\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{16}{9} f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{16}{9} \times \frac{9}{4} = 4m^2$

12.2.3.3. Aire de $IKJM$ lorsque $x = 2$.

$$S(2) = \frac{16}{9}\left(-2^2 + 3 \times 2\right) = \frac{32}{9} m^2$$

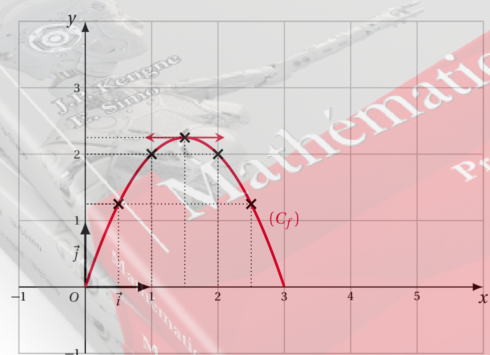
Lorsque $x = 2$, l'aire de $IKJM$ vaut $\frac{32}{9}$m^2.

12.2.4. Traçons $\left(C_f\right)$

Tableau de valeurs particulières

x	0,5	1	2	2,5
$f(x)$	1,25	2	2	1,25

On a donc la courbe suivante :



12.2.5. Déterminons une équation de la tangente au point d'abscisse $x = \frac{1}{2}$.

On sait que, si f est une fonction dérivable en un point d'abscisse x_0, une équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse x_0 est : $y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$

D'où $(T) : y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \frac{1}{2} + 3 = 2$

D'où $(T) : y - \frac{5}{4} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow (T) : \ y = 2x + \frac{1}{4}$$

12.2.6. Montrons que $\left(u_n\right)$ est une suite arithmétique.

Il suffit de montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = r$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left[2(n+1) + \frac{1}{4}\right] - \left[2n + \frac{1}{4}\right] \\ &= 2n + 2 + \frac{1}{4} - \left(2n + \frac{1}{4}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} - u_n = 2$$

D'où (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2 \times 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ et de raison 2.

1.2.5 Solution – Probatoire 2016

Solution 13. (p. 6)

Déterminons le nombre de couples (a, b) pour lesquels

13.1. Les points pondérés (A, a) et (B, b) admettent un barycentre (A, a) et (B, b) admettent un barycentre si et seulement si $a \neq b$

13.1.1. Méthode 1 :

Le nombre total de couples qui on peut former avec le nombre 1, 2, 3, 4, -1 et -3 est $N = 6^2$

Les couples avec $a + b = 0$ (c.a.d $b = -a$) sont $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(3, -3)$, $(-3, 3)$.

Donc on a au total $n_1 = 4$ couple (a, b) tels que $a + b = 0$.

Le nombre total N_1 de couples (a, b), tels que $a + b \neq 0$ est donc :

$$N_1 = N - n_1 = 6^2 - 4 = 32$$

13.1.2. Méthode 2 :

Nous allons lister tous les couples (a, b) pour lesquels $a + b = 0$ puis les compter.

Les couples sont :

$$\begin{gathered} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,-3) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,-1), (2,-3) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,-1) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,-1), (4,-3) \\ (-1,2), (-1,3), (-1,4), (-1,-1), (-1,-3) \\ (-3,1), (-3,2), (-3,4), (-3,-1), (-3,-3) \end{gathered}$$

Soit au total $N_1 = 32$ couples.

13.2. Le vecteur $a\vec{AM} + b\vec{BM}$ est constant quelque soit M.

Le vecteur $a\vec{AM} + b\vec{BM}$ est constant si et seulement si $a + b \Leftrightarrow a = -b$.

Les couples (a, b) pour lesquels $a = -b$ sont $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(3, -3)$, $(-3, 3)$

Soit au total $N_4 = 4$ couples

13.3. Les points pondérés (A, a) et (B, b) admettent un barycentre appartenant à $[AB]$

Pour que cette condition soit remplie il faut que $a + b \neq 0$ et que a et b soient de même signes les couples qui remplissent us conditions sont :

$$\begin{gathered}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\\(-1,-1),(-1,-3)\\(-3,-1),(-3,-3)\end{gathered}$$

Soit au total $N_3 = 20$ couples

13.4. Les points pondérés (A, b) et (B, b) admettent un barycentre qui est en dehors du segment $[AB]$.

Cette condition est vérifiée si et seulement si $a + b \neq 0$ et que a et b sont de signes opposés.

Il s'agit des cas suivants :

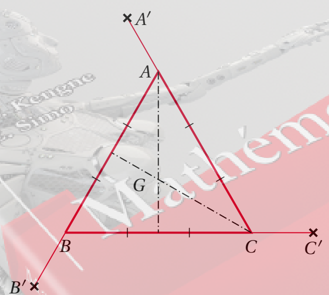
$$\begin{gathered}(1,-3)\\(2,-1),(2,-3)\\(3,-1)\\(4,-1),(4,-3)\\(-1,2),(-1,3),(-1,4)\\(-3,1),(-3,2),(-3,4)\end{gathered}$$

On a donc $N_4 = 12$ couples

- Méthode 2 :

$$N_4 = N_1 - N_3 = 32 - 20 = 12$$

Solution 14. (p. 6)



$$\vec{AA'} = \frac{1}{3}\vec{CA} \qquad \vec{BB'} = \frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{CC'} = \frac{1}{3}\vec{BC} \qquad r = r\left(G; \frac{2\pi}{3}\right)$$

14.1. 14.1.1. Déterminons l'image de la demi-droite $[CA)$ par r.

Comme $GC = GA$ et $\text{mes}\left(\widehat{\vec{GC}, \vec{GA}}\right) = \frac{2\pi}{3}$, alors $r(C) = A$

Comme $GA = GB$ et $\text{mes}\left(\widehat{\vec{GA}, \vec{GB}}\right) = \frac{2\pi}{3}$, alors $r(A) = B$

D'où $r\big([CA)\big) = [AB)$

14.1.2. Montrons que $r(A') = B'$

Posons $A_0 = r(A')$ et montrons que $A_0 = B'$

Comme $r\big([CA)\big) = [AB)$ et que $A' \in [CA)$ alors $A_0 = r(A') \in [AB)$

En plus, comme la rotation conserve les distances et que $r(C) = A$, $r(A') = A_0$ on a $CA' = AA_0$

$$\text{Donc } \begin{cases} A_0 \in [AB) \\ AA_0 = CA' \end{cases}$$

A_0 est donc le point de $[AB)$ tel que $AA_0 = CA'$

Donc $A_0 = B'$.

Ainsi $r(A') = B'$.

14.2. 14.2.1. Montrons que $r(B') = C'$

Posons $B_0 = r(B)$

$$\begin{gathered} r(A) = B \text{ et } r(B) = C \\ \Rightarrow r\big([AB)\big) = [BC) \end{gathered}$$

Comme $B' \in [AB) \Rightarrow r(B') \in [BC) \Rightarrow B_0 \in [BC)$

Aussi $r(A) = B$ et $r(B') = B_0 \Rightarrow AB' = BB_0$

$B_0 \in [BC)$ et $BB_0 = AB' \Rightarrow B_0 = C'$

Donc $r(B') = C'$

14.2.2. Déduisons que le triangle $A'B'C'$ est équilatéral.

D'après (**14.1.2.**) et (**14.2.1.**) on a

$$\begin{cases} r(A') = B' \\ r(B') = C' \end{cases}$$

De la même manière on montre que $r(C') = A'$

Or comme la rotation conserve les distances

14.2.2.1. $r(A') = B'$ et $r(B') = C'$

$$\Rightarrow A'B' = B'C' \tag{1.1}$$

$r(B') = C'$ et $r(C') = A'$

$$\Rightarrow B'C' = C'A' \tag{1.2}$$

(1.1) et (1.2) donne $A'B' = B'C' = C'A'$

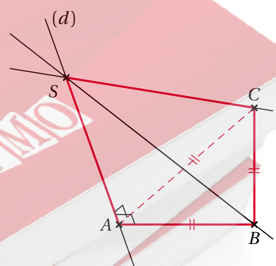
D'où $A'B'C'$ est un triangle équilatéral.

14.2.2.2. $AB = 3$, $(d) \perp (ABC)$, $A \in (d)$

$S \in (d)$ $SA = 4$,

$$\vec{SE} = \frac{16}{25}\vec{SB} \text{ et } \vec{SF} = \frac{16}{25}\vec{SC}$$

Vérifions si les droites (AE) et (AB) sont perpendiculaires



Pour cela nous allons calculer $\vec{AE} \cdot \vec{SB}$

$$\begin{aligned} \vec{AE} \cdot \vec{SB} &= (\vec{AS} + \vec{SE}) \cdot \vec{SB} \\ &= \vec{AS} \cdot \vec{SB} + \vec{SE} \cdot \vec{SB} \\ &= \vec{AS} \cdot (\vec{SA} + \vec{AB}) + \left(\frac{16}{25}\vec{SB}\right) \cdot \vec{SB} \end{aligned}$$

$$\text{car } \vec{SE} = \frac{16}{25}\vec{SB}$$

$$= \vec{AS}\cdot\vec{SA} + \vec{AS}\cdot\vec{AB} + \frac{16}{25}\vec{SB}^2$$

$$\text{or } \vec{AS}\cdot\vec{AB} = 0 \text{ car } (AS)\perp(AB)$$

$$= \vec{AS}\cdot(-\vec{AS}) + \frac{16}{25}\vec{SB}^2$$

$$= -\vec{AS}^2 + \frac{16}{25}\vec{SB}^2$$

$$= \frac{16}{25}SB^2 - AS^2$$

Or $AS = 4$, $SB^2 = SA^2 + AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ car SAB est un triangle rectangle en A

D'où $\vec{AE}\cdot\vec{SB} = \frac{16}{25} \times 25 - 4^2 = 0$

Comme $\vec{AE}\cdot\vec{SB} = 0$, alors (AE) et (SB) sont perpendiculaires.

Solution 15. (p. 6)

15.1. Partie A

15.1.1. 15.1.1.1. Calculons le coefficient de corrélation linéaire la série $(X; Y)$

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \text{ avec } \text{Cov}(X, Y) = 0{,}33$$

Calculons σ_X et σ_Y

$$\sigma_X = \sqrt{V_X} = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^2 - (\overline{X})^2}$$

$$\text{avec } \overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) - (\overline{Y})^2}$$

$$\text{avec } \overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

On a :

								Total
X_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	10,5
Y_i	0,6	1,2	1,9	2,4	2,2	2	1,5	11,8
X_i^2	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	22,75
Y_i^2	0,36	1,44	3,61	5,76	4,84	4	2,25	22,26

D'où

$$\overline{X} = \frac{10{,}5}{7} \approx 1{,}5$$

$$\overline{Y} = \frac{11{,}8}{7} \approx 1{,}686$$

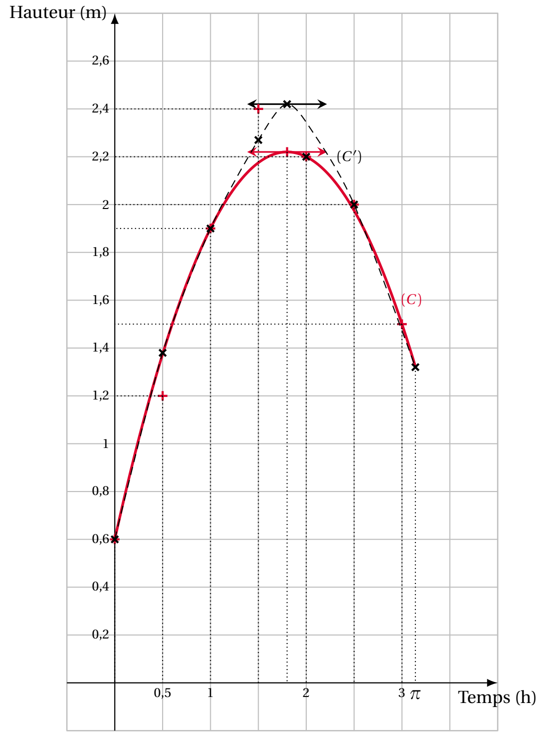
$$\sigma_X = \sqrt{\frac{22{,}75}{7} - 1{,}5^2} = 1$$

$$\text{et } \sigma_Y = \sqrt{\frac{22{,}26}{7} - 1{,}686^2} \approx 0{,}58$$

D'où $r = \dfrac{0{,}33}{1 \times 0{,}58} \approx 0{,}57$

15.1.1.2. Le coefficient de corrélation linéaire étant assez éloigné de 1, l'ajustement linéaire n'est pas approprié pour cette série.

15.1.2. Représentons le nuage de points associé à la série (X, Y) en respectant les unités données : 1 cm pour 0,5 h et 1 cm pour 0,2 h



15.1.3. $f(x) = ax^2 + bx + c$

15.1.3.1. Déterminons a, b et c à 10^{-2} près par défaut

Comme $A \in (C)$, $B \in (C)$ et $C \in (C)$ alors

$$\begin{cases} f0 = 0{,}6 \\ f(1) = 1{,}9 \\ f(2{,}5) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0{,}6 \\ a + b + c = 1{,}9 \\ 2{,}5^2 a + 2{,}5b + c = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 0{,}6 & (1.1) \\ a + b = 1{,}3 & (1.2) \\ 6{,}25a + 2{,}5b = 1{,}4 & (1.3) \end{cases}$$

$(1.3) - 2{,}5 \times (1.2)$ donne $(6{,}25 - 2{,}5)a = 1{,}4 - 1{,}3 \times 2{,}5$

$$\Rightarrow a = \frac{-1{,}85}{3{,}75} \approx -0{,}5$$

$(1.2) \Rightarrow b = 1{,}3 - a = 1{,}3 - (-0{,}5) = 1{,}8$

Donc $a \approx -0{,}5$, $b \approx 1{,}8$ et $c = 0{,}6$

D'où $f(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}8x + 0{,}6$

15.1.3.2. Étudions et représentons f dans le même repère que le nuage de points

f est continue et dérivable sur $D_f = [0; \pi]$ et $\forall x \in D_f$, $f'(x) = -x + 1{,}8 = -(x - 1{,}8)$

Donc

- si $x < +1{,}8$, $f'(x) > 0$

$$f \text{ est croissante sur } [0; 1{,}8[$$

- si $x > 1{,}8$, $f'(x) < 0$

$$\Rightarrow f \text{ est décroissante sur }]1{,}8;\pi]$$

- $f'(1{,}8) = 0$

On a le tableau de variation suivant

x	0		1.8		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0.6	$\nearrow$	2.22	$\searrow$	1.32

Tableau de valeurs particulières.

x	0	0,5	1	1,5	1,8	2	2,5	3	3,14
$f(x)$	0,6	1,38	1,9	2,17	2,22	2,2	2	1,5	1,32

Voir la courbe de f sur le graphique précédent

15.1.3.3. Déterminons la hauteur h de l'eau de ce ruisseau 165 minutes après le début de la pluie

$$165 \text{ minutes} = \frac{165}{6}\text{h} = 2{,}75\,\text{h}$$

Il s'agit donc de calculer $f(2{,}75)$

$$f(2{,}75) = -0{,}5 \times 2{,}75^2 + 1{,}8 \times 2{,}75 + 0{,}6 \approx 1{,}77$$

Donc la hauteur de l'eau du ruisseaux sera d'environ 1,77 cm, 165 minutes après le début de la pluie.

15.2. Partie B

$g : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1$$

15.2.1. Montrons que pour tout réel $x \in [0;\pi]$,

$$g(x) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + 1$$

Soit $x \in [0,\pi]$, on a :

$$g(x) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) + 1$$

$$= -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{4}\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) + 1$$

Or $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$

$$\Rightarrow g(x) = -\sqrt{2}\left(\cos\left(x + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$$

$$= -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + 1$$

15.2.2. 15.2.2.1. Calculons $g'(x)$

$$g'(x) = -\sqrt{2}\left(\cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)\right)'$$

Or on sait que $\left(\cos(ax+b)\right)' = -a\sin(ax+b)$

$$\Rightarrow g'(x) = -\sqrt{2}\left(-\sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$$

Justifions que, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{7\pi}{12}\right[$

On sait que g est définie sur $[0,\pi]$

Pour $x \in \left[0, \frac{7\pi}{12}\right[$ on a $0 \leq x < \frac{7\pi}{12}$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{12} \leq x + \frac{5\pi}{12} < \frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{12} \leq x + \frac{5\pi}{12} < \pi$$

$$\Rightarrow x + \frac{5\pi}{12} \in \left[\frac{5\pi}{12};\pi\right[\subset \left]0;\pi\right[$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) > 0 \text{ car } \forall a \in]0;\pi[, \sin a > 0$$

$$\Rightarrow g'(x) > 0$$

Pour $x \in \left[\frac{7\pi}{12};\pi\right]$ on a $\frac{7\pi}{12} \leq x \leq \pi$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} \leq x + \frac{5\pi}{12} \leq \pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \pi \leq x + \frac{5\pi}{12} \leq \frac{17\pi}{12}$$

$$\Rightarrow x + \frac{5\pi}{12} \in \left[\pi;\frac{17\pi}{12}\right] \subset [\pi;2\pi]$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right), \text{ car } \forall a \in [\pi, 2\pi], \sin a \leq 0$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow g'(x) \leq 0$$

Ainsi pour $x \in \left[0;\frac{7\pi}{12}\right[$, $g'(x) > 0$ et pour $x \in \left[\frac{7\pi}{12};\pi\right]$, $g'(x) \leq 0$ or g n'est définit que sur $[0;\pi]$

D'où $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{7\pi}{12}\right[$

15.2.2.2. Tableau de variation de g

x	0		$\frac{7\pi}{12}$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$1-\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}$	$\nearrow$	$1+\sqrt{2}$	$\searrow$	$1-\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12}$

15.2.3. Traçons en traits interrompus courts, la courbe (C_1) de g dans le même repère que le nuage de pont. On a le tableau de valeurs particulières suivant.

x	0	0,5	1	1,5	1,83	2	2,5	3	3,14
$g(x)$	0,63	1,33	1,95	2,33	2,41	2,39	2,11	1,55	1,37

(Voir le trace de (C_1) sur le graphique précédent

15.2.4. Déterminons par lecture graphique les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est une valeur approchée de $g(x)$ à 9×10^{-2} près.

$f(x)$ est une valeur approchée de $g(x)$ à 9×10^{-2} près si et seulement si $|f(x)-g(x)| \leq 9\times 10^{-2}$

$$\Leftrightarrow |h(x)| \leq 0{,}09$$
$$\Leftrightarrow -0{,}09 \leq h(x) \leq 0{,}09$$

Donc il s'agit des valeurs de x pour lesquelles C_2 est au dessus de (d') et en dessus de (d)

$$\Leftrightarrow x \in [0;2{,}2]$$

1.2.6 Solution – Probatoire 2017

Solution 16. (p. 7)

16.1. $P\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2-\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}\right)-1$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0\,.$$

Ainsi on obtient $P\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

16.2. Le discriminant Δ du polynôme P est :

$$\Delta=(2-\sqrt{2})^2-4(2\sqrt{2})(-1)$$
$$=4+2-2(2)(\sqrt{2})+8\sqrt{2}=6+4\sqrt{2}\,.$$

Le discriminant étant strictement positif, alors le polynôme P admet exactement deux racines distinctes.

16.3. Soit a l'autre racine du polynôme P.

- En utilisant la somme, on a,

$$\frac{1}{2}+a=-\frac{(2-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\,.$$

Ainsi $a=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

- En utilisant le produit, on a, $\dfrac{1}{2}\times a=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$.

Ainsi $a=\dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\times\dfrac{2}{1}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi l'autre racine du polynôme P est $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

16.4. En posant $X=\cos x$, l'équation (E) devient

$$2\sqrt{2}X^2+(2-\sqrt{2})X-1=0$$

c'est-à-dire $P(X)=0$. D'après les questions précédentes, on a :

$$P(X)=0 \Leftrightarrow X=\frac{1}{2} \text{ ou } X=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$
$$\text{ou } x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ avec } k\in(Z)$$
$$\text{et } \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$$
$$\text{ou } x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi \text{ avec } k\in(Z)\,.$$

$0\leq\dfrac{\pi}{3}+2k\pi<2\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{6}\leq k<\dfrac{5}{6} \Leftrightarrow k=0$.

On obtient $x=\dfrac{\pi}{3}$.

$0\leq-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi<2\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}\leq k<\dfrac{7}{6} \Leftrightarrow k=1$.

On obtient $x=\dfrac{5\pi}{3}$.

$0\leq\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi<2\pi \Leftrightarrow -\dfrac{3}{8}\leq k<\dfrac{5}{8} \Leftrightarrow k=0$.

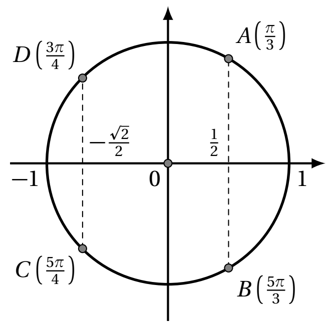
On obtient $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

$0\leq-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi<2\pi \Leftrightarrow \dfrac{3}{8}\leq k<\dfrac{11}{8} \Leftrightarrow k=1$.

On obtient $x=\dfrac{5\pi}{4}$.

Ainsi, dans $[0;2\pi[$ l'ensemble solutions de l'équation (E) est : $S=\left\{\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{5\pi}{3}\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\,;\,\dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

16.5. Représentation des points images des solutions.



Les points A, B, C et D sont respectivement les points images des solutions $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

Solution 17. (p. 7)

17.1. f étant un endomorphisme de E, alors

on a : $f(\vec{i}-\vec{j})=3\vec{i}-\vec{j} \Leftrightarrow f(\vec{i})-f(\vec{j})=3\vec{i}-\vec{j}$

et $f(\vec{i}+\vec{j})=-\vec{i}+5\vec{j} \Leftrightarrow f(\vec{i})+f(\vec{j})=-\vec{i}+5\vec{j}$.

$$\begin{cases} f(\vec{i})-f(\vec{j})=3\vec{i}-\vec{j} \\ f(\vec{i})+f(\vec{j})=-\vec{i}+5\vec{j} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2f(\vec{i})=2\vec{i}+4\vec{j} \text{ et } 2f(\vec{j})=-4\vec{i}+6\vec{j}\,.$$

On obtient $f(\vec{i})=\vec{i}+2\vec{j}$ et $f(\vec{j})=-2\vec{i}+3\vec{j}$.

Ainsi la matrice de f dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

17.2. **17.2.1.** La matrice A de g dans la base B.

$$g(\vec{i})=\vec{i}-\vec{j}+f(\vec{i})=\vec{i}-\vec{j}+\vec{i}+2\vec{j}=2\vec{i}+\vec{j}$$
$$\text{et } g(\vec{j})=8\vec{i}+f(\vec{j})=8\vec{i}-2\vec{i}+3\vec{j}=6\vec{i}+3\vec{j}\,.$$

Alors la matrice de g dans la base $B=(\vec{i},\vec{j})$ est $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

17.2.2. Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur du plan vectoriel E.

$$\begin{aligned}
\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \in \operatorname{Ker} g \\
&\Leftrightarrow g(\vec{u}) = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow g(x\vec{i} + y\vec{j}) = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow x[g(\vec{i})] + y[g(\vec{j})] = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow x(2\vec{i} + \vec{j}) + y(6\vec{i} + 3\vec{j}) = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow (2x + 6y)\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow 2x + 6y = 0 \text{ et } x + 3y = 0 \\
&\Leftrightarrow x + 3y = 0 \\
&\Leftrightarrow \vec{u} = -3y\vec{i} + y\vec{j} = -\frac{y}{2}(6\vec{i} - 2\vec{j}).
\end{aligned}$$

Ainsi Kerg est un sous espace vectoriel de E engendré par $6\vec{i} - 2\vec{j}$. Alors Kerg est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e}_1 = 6\vec{i} - 2\vec{j}$.

17.2.3. Soit $\vec{v} \in \operatorname{Im} g$ alors il existe un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ appartenant à E tel que $\vec{v} = g(\vec{u})$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\vec{v} = g(\vec{u}) &= g(x\vec{i} + y\vec{j}) \\
&= x[g(\vec{i})] + y[g(\vec{j})] \\
&= x(2\vec{i} + \vec{j}) + y(6\vec{i} + 3\vec{j}) \\
&= (x + 3y)(2\vec{i} + \vec{j}).
\end{aligned}$$

Alors Img est un sous espace vectoriel de E engendré par le vecteur non nul $2\vec{i} + \vec{j}$. D'où Img est une droite vectorielle de E dont une base est $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$.

17.2.4. $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont deux vecteurs du plan vectoriel E et $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 10$ qui est différent de 0 alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E.

17.2.5. $g(\vec{e}_2) = g(2\vec{i} + \vec{j}) = 2g(\vec{i}) + g(\vec{j}) =$

$$= 2(2\vec{i} + \vec{j}) + (6\vec{i} + 3\vec{j}) = 10\vec{i} + 5\vec{j} = 5(2\vec{i} + \vec{j}) = 5\vec{e}_2.$$

D'où $g(\vec{e}_2) = 5\vec{e}_2$.

17.2.6. $g(\vec{e}_1) = \vec{0}$ car $\vec{e}_1 \in \operatorname{Ker} g$ et $g(\vec{e}_2) = 5\vec{e}_2$ alors la matrice de g dans la base B' est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Solution 18. (p. 7)

18.1. Déterminer x et y c'est déterminer dans $(\mathbb{R})$ les solutions de l'équation d'inconnue a, $a^2 - 40a + 256 = 0$.

$$\Delta = (-40)^2 - 4(256) = 576 = 24^2$$

$$\begin{aligned}
\text{alors } a^2 - 40a + 256 = 0 \\
&\Leftrightarrow a = \frac{40 - 24}{2} = 8 \\
&\text{ou } a = \frac{40 + 24}{2} = 32.
\end{aligned}$$

D'où x = 8 et y = 32 ou x = 32 et y = 8.

18.2. 18.2.1. $16^3 = 4096$.

a, b et c dans cet ordre, termes consécutifs d'une suite géométrique décroissante de termes positifs alors on a : $c \le b \le a$ et $ac = b^2$. Ainsi $a \times b \times c = 4096 \Leftrightarrow b^3 = 4096$. D'après le calcul précédent, $b = 16$.

18.2.2. En remplaçant b par sa valeur dans le système

$$\begin{cases} a + b + c = 56 \\ a \times b \times c = 4096, \end{cases}$$

on obtient le système

$$\begin{cases} a + c = 40 \\ a \times c = 256. \end{cases}$$

D'après la question (**18.1.**), et en tenant compte de la condition $c \le a$ on obtient $a = 32$ et $c = 8$.

Solution 19. (p. 7)

19.1. Partie 1

19.1.1. Le milieu du segment [BC] a pour coordonnées $\left(\frac{-2+2}{2}; \frac{0+0}{2}\right) = (0;0)$. Alors le point O, origine du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$est le milieu du segment $[BC]$.

19.1.2. $G = \operatorname{bar}\{(A,2),(B,1),(C,1)\} =$

$$= \{(A,2),(O,2)\}$$

car O est le milieu du segment $[BC]$. Alors les points G, O et A sont alignés. D'où le point G appartient à la droite (OA).

19.1.3. $G = \{(A,2),(B,1),(C,1)\}$ alors G a pour coordonnées

$$\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times (-2) + 1 \times 2}{4}; \frac{2 \times 2 + 1 \times 0 + 1 \times 0}{4}\right) = (0;1).$$

D'où $G(0;1)$.

19.1.4. Soit M un point du plan.

$$\begin{aligned}
AM^2 + OM^2 &= \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 \\
&= AG^2 + 2\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GM} + GM^2 + OG^2 + \\
&\quad + 2\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GM} + GM^2 \\
&= 2GM^2 + 2\overrightarrow{GM}.\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{OG}\right) + \\
&\quad + AG^2 + OG^2 \\
&= 2GM^2 + 2OG^2.
\end{aligned}$$

Car G est le milieu de $[OA]$.

Or $\mathrm{OG} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ alors

$$\begin{aligned}
AM^2 + OM^2 = 2GM^2 + 2OG^2 &= 2GM^2 + 2(1)^2 \\
&= 2GM^2 + 2.
\end{aligned}$$

19.1.5. Soit M un point du plan.

$$\begin{aligned}
M \in (\mathcal{T}) &\Leftrightarrow 2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 28 \\
&\Leftrightarrow 2AM^2 + \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}\right)^2 + \\
&\quad + \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = 28 \\
&\Leftrightarrow 2AM^2 + BO^2 + 2\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{OM} + OM^2 + \\
&\quad + CO^2 + 2\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{OM} + OM^2 = 28 \\
&\Leftrightarrow 2AM^2 + 2OM^2 + 2\overrightarrow{OM}.\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}\right)
\end{aligned}$$

$$+BO^2+CO^2=28$$
$$\Leftrightarrow 2AM^2+2OM^2+2BO^2=28.$$

Car O est le milieu de $[BC]$.
Or $BO=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$ et d'après la question précédente $\mathrm{AM}^2+\mathrm{OM}^2 = 2\mathrm{GM}^2+2$, alors

$$2AM^2+BM^2+CM^2=28 \Leftrightarrow 4GM^2+4+8=28$$
$$\Leftrightarrow 4GM^2=16$$
$$\Leftrightarrow GM^2=4.$$

D'où $(\top)$ est le cercle de centre G et de rayon 2.

19.2. Partie 2

19.2.1. La courbe de f passe par le point $A(0;2)$ alors on a $f(0)=2 \Leftrightarrow c=2$.
La courbe de f passe par le point $B(-2;0)$ alors on a $f(-2)=0 \Leftrightarrow 4a-2b+c=0$.
La courbe de f passe par le point $C(2;0)$ alors on a $f(2)=0 \Leftrightarrow 4a+2b+c=0$.
a, b et c vérifient le système

$$\begin{cases} c=2 \\ 4a-2b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases}$$

dont la résolution donne $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=0$ et $c=2$.
Ainsi pour tout réel x, $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2$.

19.2.2. Pour tout réel x,

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2=-\frac{1}{2}(x^2-4)=-\frac{1}{2}(x-2)(x+2).$$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$.
Le tableau de signe de f est

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$-\frac{1}{2}$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi l'ensemble solution de l'inéquation $f(x)>0$ est $S=]-2\,;\,2[$.

19.3. Partie 3

19.3.1. $x \in D$ si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi $D=]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

19.3.2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} -x=-\infty.$$
$$\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-4}{0}=+\infty,$$
$$\text{et }\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{-4}{0}=-\infty$$

car le tableau de signe du dénominateur x est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

$\displaystyle\lim_{x\to0^-} g(x)=+\infty$, et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} g(x)=-\infty$ alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

19.3.3. g est dérivable sur son ensemble de définition D et pour tout réel x différent de 0, on a :

$$g'(x)=\frac{(-x^2+x-4)'\times x-(x)'\times(-x^2+x-4)}{x^2}$$
$$=\frac{(-2x+1)\times x-1\times(-x^2+x-4)}{x^2}$$
$$=\frac{-x^2+4}{x^2}=\frac{2\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)}{x^2}$$
$$=\frac{2f(x)}{x^2}.$$

19.3.4. Pour tout réel $x\neq0$, $g'(x)=\dfrac{2f(x)}{x^2}$ alors $g'(x)$ et $f(x)$ ont le même signe pour tout réel $x\neq0$. Or d'après la question (19.2.2.), $f(x)>0$ est positive sur $]-2\,;\,2[$ et $f(x)\leq0$ sur $]-\infty\,;\,-2]\cup[2\,;\,+\infty[$.
Ainsi : g est **croissante** dans les intervalles $]-2\,;\,0[$ et $]0\,;\,2[$.
g est **décroissante** dans les intervalles $]-\infty\,;\,-2]$ et $[2\,;\,+\infty[$.
Tous les résultats obtenus se traduisent par le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g(x)	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

19.3.5. Soit x un réel différent de 0, on a :

$$-x+1-\frac{4}{x}=\frac{(-x+1)x-4}{x}=\frac{-x^2+x-4}{x}.$$

D'où $-x+1-\dfrac{4}{x}=1-x-\dfrac{4}{x}=g(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} g(x)-(-x+1)=\lim_{x\to\infty}\left[1-x-\frac{4}{x}-(-x+1)\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}-\frac{4}{x}=0.$$

Alors la droite (D) d'équation $y=-x+1$ est asymptote oblique à la courbe (C).

19.3.6. La droite (D) a pour équation cartésienne $x+y-1=0$ et $G(0;1)$. Alors $d(G,(D))=\dfrac{(0)+(1)-(1)}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{0}{\sqrt{2}}=0$. Ainsi $d(G,(D))=0$.
La distance du point G centre du cercle $(\top)$ à la droite (D) étant inférieure au rayon du cercle $(\top)$, alors le cercle $(\top)$ et la droite (D) sont sécantes.
Le cercle $(\top)$ a pour équation

$$x^2+(y-1)^2=4 \text{ ie } x^2+y^2-2y-3=0$$

alors Les coordonnées des points d'intersection de (C) et $(\top)$ sont les couples $(x;y)$ solutions du système

$$\begin{cases} y=-x+1 & (1.1) \\ x^2+y^2-2y-3=0. & (1.2) \end{cases}$$

En remplaçant y par sa valeur dans (1.1), on obtient l'équation

$$x^2+(-x+1)^2-2(-x+1)-3=0 \Leftrightarrow 2x^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2}.$$

Pour $x=\sqrt{2}$, on a $y=-\sqrt{2}+1$ et pour $x=-\sqrt{2}$, on a $y=\sqrt{2}+1$.

Alors les points d'intersection de (C) et (T) sont les points de coordonnées $(-\sqrt{2};\sqrt{2}+1)$ et $(-\sqrt{2};\sqrt{2}+1)$.

19.3.7. La courbe (C) de g.