Terminales D, TI

Eric Simo, Editeur

MATHÉMATIQUES

Baccalauréat – Sujets Corrigés

Jean-Pierre Kengne, Emmanuel Simo

Avec 9 schémas d'illustration
et 15 exercices corrigés

Eric Simo, Msc.-Ing. TU-BS (Editeur)
An den Äckern 2
31224 Peine
Allemagne
kuateric@gmail.com

Mathématiques Terminales D, TI. Nouvelle Edition

Auteurs: Jean-Pierre Kengne, Maître Es Sciences; Emmanuel Simo, Maître Es Sciences (Cameroun)

Contributions: E. S. (Allemagne); F. W., J. T. (Cameroun); E. A. F. (Italie, R-U); T. v. P. (Pays-Bas); A. Z., L. S., I. D. (Ukraine); D. R., P. B. (Italie); M. B. (Zimbabwe); F. K. (Pakistan); A. K. (Russie); R. K. (Maroc)

Conception graphique des couvertures: R. A. (Bangladesh)
Thème artistique des couvertures 2017: Intelligence Artificielle

ISBN 978-3-947242-04-7 • Maison d'Edition SIMO • Bandjoun Brunswick Belfast Rotterdam • 2017

Site Internet: www.simo.education

Avant-propos

Vous avez choisi ce livre parce que vous avez un objectif à atteindre. C'est un instrument réellement utile et efficace pour aider les apprenants des **classes de terminales scientifiques et techniques**, quel que soit leur niveau, à améliorer leurs performances en **mathématiques**.

Inspirée de la pédagogie nouvelle, la conception de ce livre se fonde sur deux outils à savoir : le *cours* et les *exercices corrigés*.

Le cours a été conçu selon le projet pédagogique suivant :

- Une présentation claire parfaitement lisible qui permet de faciliter le travail de l'apprenant.
- Un cours bien structuré allant à l'essentiel. Conforme aux contenus du programme, ce cours prépare aux compétences exigibles, mais en se limitant strictement aux notions qui doivent être étudiées. Nous l'avons donc voulu bref.

Les exercices résolus et commentés, soutenus par des *méthodes de résolution* permettent à l'apprenant d'acquérir l'esprit scientifique et les principaux modes de raisonnement qu'il devra savoir développer. C'est une bonne façon d'aborder les nombreux exercices de chaque chapitre. Dans le souci d'efficacité qui a fait le succès de cette édition, nous attirons votre attention dans les solutions proposées, sur la schématisation, la représentation graphique, le choix des notations, la conduite littérale et enfin l'application numérique.

Notons cependant qu'il ne sert à rien de lire à priori la solution d'un exercice, mais qu'il faut chercher cette solution après avoir lu l'énoncé en entier et ne consulter la solution proposée dans le livre que pour contrôler son propre résultat ou en cas d'hésitation.

Nous formons le vœu que cet ouvrage constitue un outil efficace pour les apprenants des **classes de terminales scientifiques et techniques** et qu'il apporte à nos collègues professeurs l'aide qu'ils sont en droit d'attendre. Nous attendons avec plaisir toutes les remarques et suggestions.


J.P. Kengne
E. Simo
Mathématiques
Terminales D, TI
Nouvelle Edition

Table des matières


J.P. Kengne
E. Simo
Mathématiques
Terminales D, TI
Nouvelle Edition

Sujets d'examen – Baccalauréat Mathématiques – Séries D, TI

1.1 Enoncé des sujets d'examen

1.1.1 Enoncé – Baccalauréat 2012

Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2012	Durée:	4 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	4

Exercice 1.

Une maîtresse a regroupé dans un tableau statistique les résultats d'une enquête portant sur le nombre de gâteaux consommés pendant la récréation par 200 élèves d'une maternelle.

Modalité	0	1	2	3	4
Effectif	10			35	
Effectif cumulé croissant	10		80	115	
Fréquence en pourcentage		20		17,5	

1.1. Quelle est la nature du caractère étudié?
1.2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
1.3. Quel est le mode de cette série statistique?
1.4. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de la série étudiée.

Exercice 2.

2.1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $2z^2-2iz-1=0$.
2.2. Le plan orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ on considère les points A et B d'affixes respectives $\frac{-1+i}{2}$ et $\frac{1+i}{2}$.
Démontrer que OAB est un triangle rectangle de sommet principal O.
2.3. On pose $Z=\frac{-1+i}{1+i}$.
2.3.1. Écrire Z sous la forme trigonométrique.
2.3.2. En déduire les racines cubiques de Z sous le forme trigonométrique puis sous la forme algébrique.

Exercice 3.

Problème
3.1. Partie A
Soit la fonction numérique définie sur $]-1,0]$ par $f(x)=\ln(1-x^2)-x$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 10 cm).
3.1.1. Déterminer la limite de f à droite de -1.
Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
3.1.2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3.1.3. Donner le coefficient directeur de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 0.
3.1.4. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]-0,72,-0,71[$ une unique solution α.
3.1.5. Tracer (D) et (C).
3.1.6. Tracer dans le même repère la courbe représentative de $|f(x)|$.
3.2. Partie B
3.2.1. Vérifier l'égalité

$$\int_\alpha^0 \ln\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\int_\alpha^0 \ln(1+x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^0 \ln(1-x)\mathrm{d}x$$

3.2.2. A l'aide des intégrations par parties, calculer en fonction de α les intégrales suivantes : $I=\int_\alpha^0 \ln(1+x)\mathrm{d}x$ et $J=\int_\alpha^0 \ln(1-x)\mathrm{d}x$.
(On pourra remarquer que $\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$ et $\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}$).
3.2.3. On désigne par A l'aire exprimée en cm^2 de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C), et les droites d'équations $x=a$ et $x=0$.
Calculer A en fonction de α.
3.3. Partie C
On considère la suite (u_n) à termes positifs définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_{n+1}=2\sqrt{u_n}$ et $u_1=1$.
3.3.1. Calculer u_2 et u_3, donner les résultats sous la forme 2^λ où $\lambda\in\mathbb{R}$.
3.3.2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n=\ln u_n-2\ln 2$.
3.3.2.1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3.3.2.2. Exprimer v_n en fonction de n.
3.3.2.3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

1.1.2 Enoncé – Baccalauréat 2013

Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2013	Durée:	4 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	4

Exercice 4.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
4.1. 4.1.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+8=0$.
4.1.2. Écrire les solutions sous forme trigonométrique.
4.2. 4.2.1. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A=2+2i$; $z_B=2-2i$ et $z_C=4$. Placer les points A, B et C dans le plan.
4.2.2. Calculer le rapport $\frac{z_A-z_B}{z_B-z_C}$; en déduire la nature du triangle CAB, puis celle du quadrilatère $AOBC$.
4.3. Soit f la similitude directe du plan complexe qui laisse le point C invariant et qui transforme le point A en O.
4.3.1. Donner l'écriture complexe de f.
4.3.2. Donner les éléments caractéristiques de f.

Soit g la transformation de P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1-\mathrm{i})z + 4\mathrm{i}$.

4.3.3. Écrire sous forme algébrique, l'affixe de G', image du barycentre G des points pondérés $(A,3)$; $(B,2)$ et $(C,-3)$ par g.

Exercice 5.

Une boite contient 6 boules vertes et n boules blanches toutes indeiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer successivement sans remise deux boules de la boite. Si les deux boules sont de même couleur, le joueur gagne 100 F et si les boules sont de couleurs différentes, le joueur perd 100 F.

5.1. Dans cette question on suppose $n = 3$.

5.1.1. Calculer la probabilité d'obtenir

i Deux boules de même couleur.

ii Deux boules de couleurs différents.

5.1.2. Sachant que la première boule tirée est verte, quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée soit verte ?

5.2. Dans cette question, l'entier naturel n est quelconque et supérieur à 3. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage successif sans remise de deux boules associe le gain algébrique en francs du joueur.

5.2.1. Exprimer en fonction de n les probabilités des événements $[X = -100]$ et $[X = 100]$.

5.2.2. Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(x) = 100\dfrac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$.

5.2.3. Pour quelles valeurs de n a-t-on $E(X) < 0$?

Exercice 6.

Problème

6.1. Partie A

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$, par

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

6.1.1. Montrer que pour tout réel $x > 1$, $f(x) > 1$.

6.1.2. On considère les suites (v_n) et (w_n), tels que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln v_n$$

6.1.2.1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

6.1.2.2. Calculer v_1 et w_1.

6.1.2.3. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

6.1.2.4. Exprimer pour tout entier naturel n, w_n puis v_n en fonction de n.

6.1.2.5. En déduire que $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}}$; puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

6.2. Partie B

Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans une repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$; avec pour unité 1 cm sur l'axe des ordonnées.

6.2.1. 6.2.1.1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

6.2.1.2. Étudier le sens de variations de h.

6.2.1.3. Dresser le tableau de variations de h.

6.2.1.4. Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6.2.2. 6.2.2.1. Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction H définie par $H(x) = \left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction h.

6.2.2.2. Soit λ un réel strictement positif. Calculer le réel : $\displaystyle\int_0^\lambda h(x)\mathrm{d}x$.

6.2.2.3. $A(\lambda)$ est l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

Déterminer $A(\lambda)$ puis calculer sa limite lorsque λ tend vers plus l'infini.

6.3. Partie C

On considère les équations différentielles suivantes : $(E): y'' - 2y' + y = x - 2$; $(E'): y'' - 2y' + y = 0$

On considère la fonction affine ϕ définie par $\phi(x) = ax + b$.

6.3.1. Déterminer a et b pour que la fonction ϕ soit solution de l'équation (E).

6.3.2. Soit g une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que g est solution (E) si et seulement si $g-\phi$ est solution de (E').

6.3.3. Résoudre (E').

6.3.4. En déduire les solutions de l'équation (E).

1.1.3 Enoncé – Baccalauréat 2014

Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2014	Durée:	4 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	4

Exercice 7.

7.1. Partie A

On considère le polynôme p défini par $p(z) = z^3 - 3z^2 - 3z + 5 + 20\mathrm{i}$, z étant un nombre complexe.

7.1.1. Montrer que $1+2\mathrm{i}$ est une racine de p.

7.1.2. Trouver deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait $p(z) = (z-1-2\mathrm{i})\left(z^2+az+b\right)$.

7.1.3. En déduire dans l'ensemble des nombres complexes, les solutions de l'équation $p(z) = 0$.

7.2. Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$; on prendra 1 cm pour unité graphique.

7.2.1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1+2\mathrm{i}$, $b = -2-\mathrm{i}$ et $c = 4-\mathrm{i}$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

7.2.2. Soit D le point d'affixe $2+3\mathrm{i}$; montrer que A, B et D sont alignés.
7.2.3. 7.2.3.1. Calculer $\dfrac{b-a}{c-a}$, mettre le résultat sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique.
7.2.3.2. En déduire la nature exacte du triangle ABC.

Exercice 8.

Une entreprise achète, utilise et revend des marchandises après un certain nombre x_i d'années. Après 6 années, l'évolution du prix de vente d'une machine en fonction du nombre d'année d'utilisation, se présente comme suit.

Nombre d'année x_i	1	2	3	4	5	6
Prix y_i en milliers de FCFA	150	125	90	75	50	45

8.1. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. (on prendra 1 cm pour une année en abscisse, et 1 cm pour 20 000 FCFA en ordonnées).
8.2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série (x_i, y_i) ainsi définie.
8.3. En utilisant la méthode des moindres carrés, déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x de cette série statistique.
8.4. En déduire une estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation.

Exercice 9.

Problème
On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie pour tout $x \neq -2$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
9.1. Partie A
9.1.1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
9.1.2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
9.1.3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-1, +\infty[$; montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
9.1.4. Tracer dans le même repère, la courbe (C) représentative de f, et la courbe (C') représentative de g^{-1}.
9.2. Partie B
9.2.1. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0, 1]$.
9.2.2. Calculer $f''(x)$ et vérifier que pour tout x de $[0, 1]$, $f''(x) > 0$.
9.2.3. En déduire que pour tout x de $[0, 1]$, $\dfrac{1}{4} \leq f'(x) \leq \dfrac{2}{3}$.
9.2.4. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, 1]$ (on ne demande pas de calculer α).
9.3. Partie C
On considère la suite (u_n) à termes positifs, définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel non nul n ; $u_{n+1} = f(u_n)$.
9.3.1. Montrer par récurrence sur n que la suite (u_n) est croissante et que $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$; quelle conclusion peut-on en tirer ?
9.3.2. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$.
9.3.3. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
9.3.4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

1.1.4 Enoncé – Baccalauréat 2015

Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2015	Durée:	4 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	4

Exercice 10.

On considère l'application t de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $t(z) = 9z^4 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$.
10.1. Montrer que si z_0 est une racine de t, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de t.
10.2. Vérifier que i est une racine de t et en déduire une autre racine de t.
10.3. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que $t(z) = (z^2+1)(az^2+bz+c)$, $\forall z \in \mathbb{C}$
10.4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $t(z) = 0$.
10.5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{U}, \vec{V})$ (unité graphique : 3 cm).
On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = -\mathrm{i}$, $z_B = \mathrm{i}$, $z_C = \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{3}\mathrm{i}$ et $z_D = \dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{3}\mathrm{i}$
10.5.1. Placer les points A, B, C et D.
10.5.2. Montrer que $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ et $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ où $\mathrm{i}\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires pures.
10.5.3. En déduire la nature exacte des triangles ACD et CBD.
10.5.4. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 11.

Une urne contient 6 jetons rouges et 4 jetons jaunes. Un jeu consiste à tirer simultanément 2 jetons de l'urne. Si les jetons sont de même couleur, le joueur gagne 1000 FCFA ; s'il sont de couleurs différentes, alors le joueur perd 1000 FCFA.
11.1. 11.1.1. Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de même couleur.
11.1.2. Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de

couleurs différentes.

11.2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux jetons associe le gain ou la perte du joueur.

11.2.1. Donner les différentes valeurs possibles de X.

11.2.2. Déterminer la loi de probabilité de X.

11.2.3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

Exercice 12.

Problème

12.1. Partie A

On considère l'équation différentielle

$$y'' - 4y = 16x + 16 \qquad \text{(E)}$$

12.1.1. Résoudre l'équation homogène (E') associée à (E) :

$$y'' - 4y = 0 \qquad \text{(E')}$$

12.1.2. Déterminer les réels α et β tels que le polynôme $P(x) = \alpha x + \beta$ soit une solution particulière de (E).

12.1.3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - P$ est solution de (E').

12.1.4. En déduire toutes les solutions de (E).

12.1.5. Déterminer parmi ces solutions celle qui vérifie les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = -4$.

12.2. Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{-2x} - 4$$

12.2.1. Montrer que

$$g(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(\mathrm{e}^{4x} - 4\mathrm{e}^{2x} + 3\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

12.2.2. Étudier le signe de $g(x)$.

12.2.3. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 4x$$

12.2.3.1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-4x} - 4x\mathrm{e}^{-2x}\right)$$
$$= \mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4x} - \frac{3}{2} - 4x\mathrm{e}^{2x}\right)$$

12.2.3.2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.

12.2.3.3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = g(x)$.

12.2.3.4. En déduire le tableau de variation de h.

12.2.3.5. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution réelle α telle que $\alpha \in]1, 2[$.

12.2.3.6. Construire la courbe représentative (C_h) de la fonction h dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 3 cm sur les axes.

12.2.4. Déterminer l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C_h), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}\ln 3$.

1.1.5 Enoncé – Baccalauréat 2016

Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2016	Durée:	4 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	4

Exercice 13.

Le tableau ci-dessous présente la taille x (en centimètres) et la pointure y de chaussures (en centimètres) de dix élèves choisis au hasard dans une classe de terminale D.

x	150	159	158	160	165
y	40	41	43	43	42
x	168	170	172	175	171
y	44	44	44,5	44,5	44

13.1. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points de cette série statistique.

13.2. 13.2.1. En prenant la covariance de la série $(x; y)$ égale à 9,6; pour écart-types marginaux σ_x et σ_y respectivement égaux 7,4 et 1,4; calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x; y)$.

13.2.2. Utiliser la méthode des moindres carrés pour donner une équation cartésienne de l'ajustement linéaire de y en x.

13.2.3. En déduire au centième près la pointure d'un élève de cette classe dont la taille est de 163 cm dans le cas où le comportement général est proche de celui de l'échantillon choisi.

13.3. 13.3.1. On choisit au hasard et simultanément six élèves parmi les dix élèves sélectionnés : Calculer la probabilité d'avoir exactement trois élèves dont la pointure est d'au moins de 44 cm.

13.3.2. Calculer la probabilité de l'événement : « la taille est supérieure ou égale à 160 cm sachant que la pointure est inférieure ou égale 44 cm », lorsqu'on choisit au hasard un élève parmi les dix.

Exercice 14.

14.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 12z + 153 = 0$.

14.2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{3}{2} + 6\mathrm{i}; \qquad z_B = \frac{3}{2} - 6\mathrm{i};$$
$$z_C = -3 - \frac{1}{4}\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_P = 3 + \mathrm{i}$$

et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

14.2.1. Déterminer l'affixe z_Q du point Q image du point B par la translation t de vecteur $\vec{w}$.

14.2.2. Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

14.2.3. Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

14.3. 14.3.1. Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.
14.3.2. Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ et en déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$.
14.3.3. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle dont on précisera l'affixe de son centre et son rayon.

Exercice 15.

Problème :
On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = (x-2)e^x + x;$$

$(\mathscr{C}_f)$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
15.1. 15.1.1. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 0$.
15.1.2. Justifier que f est une solution de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = x - 2$.
15.2. Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = (x-1)e^x + 1.$$

15.2.1. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
15.2.2. En déduire que g est positive sur $\mathbb{R}$.
15.3. 15.3.1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
15.3.2. Montrer que la droite (Δ) : $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$. Étudier la branche infinie à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$. Étudier en fonction de x la position de $(\mathscr{C}_f)$ et de (Δ).
15.4. 15.4.1. Soit f' la dérivée de f ; vérifier que pour tout réel x on a, $f'(x) = g(x)$; en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
15.4.2. Justifier que la fonction f établit une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.
15.4.3. Dresser les tableaux de variation de f et de f^{-1} bijection réciproque de f.
15.5. 15.5.1. Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
15.5.2. Construire $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé(unités graphiques 1 cm).
15.6. D est le domaine du plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations respectives $x = 0$; $x = 2$. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A du domaine D.

1.1.6 Enoncé – Baccalauréat 2017

Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2017	Durée:	4 heures
Épreuve:	Mathématiques	Coef.:	4

L'énoncé de ce sujet peut être gratuitement téléchargé sur :

www.simo.education

1.2 Solution des sujets d'examen

1.2.1 Solution – Baccalauréat 2012

Solution 1. (p. 2)

Soit le tableau suivant portant sur le nombre de gâteaux mangés par les élèves d'une maternel

Modalité (x_i)	0	1	2	3	4	Total
Effectif (n_i)	10	40	30	35	85	200
Effectif cumulé croissant	10	50	80	115	200	
Fréquence (en %)	5	20	15	17,5	42,5	100
$n_i x_i$	0	40	60	105	340	545
$n_i {x_i}^2$	0	40	120	315	1360	1835

1.1. Le caractère étudié est quantitatif.
1.2. Complétons le tableau.

- Fréquence de la modalité 0.
  On sait que $200 \to 100\,\%$ alors $10 \to 10 \times \dfrac{100}{200} = 5\,\%$
- Effectif de la modalité 1.
  On sait que son pourcentage est 20 donc l'effectif est : $\dfrac{20 \times 200}{100} = 40$.
- Effectif et fréquence de la modalité 2.
  effectif $= 80 - 50 = 30$ et fréquence $= \dfrac{30 \times 100}{200} = 15$
- Effectif et fréquence de la modalité 4.
  effectif $= 200 - 115 = 85$ et fréquence $= \dfrac{85 \times 100}{200} = 42{,}5$

1.3. Le mode de cette série est la modalité 4 car elle a le plus grand effectif.
1.4. Calculons

- La moyenne
  On sait que $\overline{x} = \dfrac{1}{N} \sum n_i x_i = \dfrac{545}{200} = 2{,}725$.
- Variance
  On sait que

$$V = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{1835}{200} - 2{,}725^2 = 1{,}749375$$

- Ecart type
  $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{1{,}749375} \approx 1{,}323$

Solution 2. (p. 2)

2.1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2-2iz-1=0$.
On a $\Delta=(-2i)^2-4(2)(-1)=-4+8=4=2^2$
D'où $z_1=\dfrac{2i-2}{4}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ et $z_2=\dfrac{2i+2}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.
L'ensemble solution de cette équation est :

$$S=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$$

2.2. Dans le plan orienté et muni du repère $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ on donne les points $A\left(\dfrac{-1+i}{2}\right)$ et $B\left(\dfrac{1+i}{2}\right)$.
Démontrons que OAB est un triangle rectangle de sommet principal O.
Il suffit de montrer que $\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=ki$ $(k\in\mathbb{R})$
On a :

$$\begin{aligned}\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}&=\frac{\frac{1+i}{2}-0}{\frac{-1+i}{2}-0}\\&=\frac{1+i}{-1+i}\\&=\frac{(1+i)(-1-i)}{2}\\&=-\frac{2i}{2}\\&=-i=ki\quad\text{avec }(k=-1)\end{aligned}$$

D'où OAB est un triangle rectangle de sommet principale O.

2.3. On pose $Z=\dfrac{-1+i}{1+i}$.

2.3.1. Écrivons Z sous la forme trigonométrique.

- *Méthode 1*

$$\begin{aligned}Z&=\frac{-1+i}{1+i}\\&=\frac{\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\\&=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\\&=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

- *Méthode 2*

$$Z=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{(-1+i)(1-i)}{2}=\frac{2i}{2}=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

2.3.2. Déduisons-en les racines cubiques de Z sous la forme trigonométrique.
Soit $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ une racine cubique de Z où r et α sont des réels
Alors $z^3=Z$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow r^3(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha)=Z\\&\qquad=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\&\Leftrightarrow\begin{cases}r^3=1\\3\alpha\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}r=1\\\alpha=\frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}r=1\\\alpha\in\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\{0,1,2\}\right\}\end{cases}\end{aligned}$$

Les racines cubiques de Z, sous leurs formes trigonométriques, sont : $z_1=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$.

$$z_2=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$$

Et

$$z_3=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$$

Leurs formes algébriques sont :
$z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, $z_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ et $z_3=0-i=-i$

Solution 3. (p. 2)

Problème

3.1. Partie A

Soit la fonction f définie sur $]-1,0]$ par $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)-x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

3.1.1. Déterminons la limite de f à droite de -1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^+}&=\lim_{x\to-1^+}\ln\left(1-x^2\right)-x\\&=\lim_{x\to-1^+}\ln\left(1-x^2\right)-\lim_{x\to-1^+}x\\&=\lim_{x\to-1^+}\ln(1-x)(1+x)+1\\&=1+\lim_{x\to-1^+}\ln 2(1+x)\end{aligned}$$

Posons $X=2(1+x)$, alors $x\to-1^+$; $X\to0^+$
D'où $\lim_{x\to-1^+}f(x)=1+\lim_{x\to0^+}\ln X=1-\infty=-\infty$
Interprétation graphique des résultats.
Comme $\lim_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$, alors la courbe (C) admet la droite d'équation $x=-1$ comme asymptote vertical.

3.1.2. Étudions les variations de f et dressons le tableau de variations.

- Calcul de la fonction dérivée.
  f est continue et dérivable sur $]-1,0]$, comme somme de fonctions continue et dérivables.
  Et $\forall x\in]-1,0]$,

$$f'(x)=\frac{\left(1-x^2\right)'}{1-x^2}-1$$

$$= -\frac{2x}{1-x^2} - 1$$
$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{1-x^2}$$
$$= \frac{\left(x-(1-\sqrt{2})\right)\left(x-(1+\sqrt{2})\right)}{1-x^2}$$

$$f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-(1-\sqrt{2})\right)\left(x-(1+\sqrt{2})\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1-\sqrt{2} \quad \text{ou } x = 1+\sqrt{2}$$

- Étude du signe de $f'(x)$ sur $]-1, 0]$
  On a : $1-x^2 > 0$ et $x-(1+\sqrt{2}) < 0$
  D'où $f'(x)$ est de signe opposé à celui de $x-(1-\sqrt{2})$
  D'où $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in]-1, 1-\sqrt{2}]$
  Et $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in [1-\sqrt{2}, 0]$
- Sens de variations
  De l'étude du signe de $f'(x)$ précédente on a :
  f est croissante sur $]-1, 1-\sqrt{2}]$ et décroissante sur $[1-\sqrt{2}, 0]$
- Tableau de variations
  On a $f(1-\sqrt{2}) = \ln(2\sqrt{2}-2) - 1 + \sqrt{2}$ et $f(0) = 0$

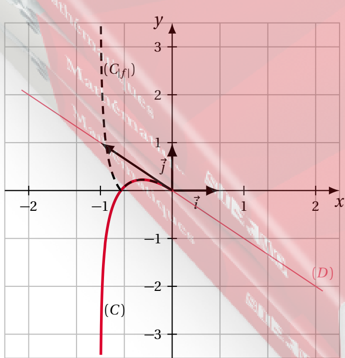
x	-1		$1-\sqrt{2}$		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(2\sqrt{2}-2)-1+\sqrt{2}$	$\searrow$	0

3.1.3. Coefficient directeur de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 0 est :

$$a = f'(0) = \frac{0^2 - 2(0) - 1}{1-0^2} = -1$$

3.1.4. Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-0,72, -0,71[$ une unique solution α.
Comme $]-0,72, -0,71[\subset]-1, 1-\sqrt{2}]$ et que f est strictement croissante sur $]-1, 1-\sqrt{2}]$ alors la restriction de f sur $]-0,72, -0,71[$ est strictement croissante et continue donc bijective.
D'autre part $f(-0,72) \approx -0,0106 < 0$ et $f(-0,71) \approx 0,086 > 0$
$\Rightarrow 0 \in]f(-0,72), f(-0,71)[$
$\Rightarrow \exists! \alpha \in]-0,72, -0,71[$, tel que $f(\alpha) = 0$.

3.1.5. Traçons (C) et (D)



3.1.6. Traçons dans le même repère la courbe de $|f(x)|$
Pour le faire on conserve la partie de courbe qui est au dessus de l'axe de l'abscisse et on fait la symétrie de l'autre par rapport à l'axe des abscisses.

3.2. Partie B

3.2.1. Vérifions que

$$\int_\alpha^0 \ln\left(1-x^2\right)dx = \int_\alpha^0 \ln(1+x)dx + \int_\alpha^0 \ln(1-x)dx$$

$$\int_\alpha^0 \ln\left(1-x^2\right)dx = \int_\alpha^0 \ln(1-x)(1+x)dx$$
$$= \int_\alpha^0 \left(\ln(1-x) + \ln(1+x)\right)dx$$

Car

$$\ln ab = \ln a + \ln b = \int_\alpha^0 \ln(1+x)dx + \int_\alpha^0 \ln(1-x)dx$$

Car $\int f + g = \int f + \int g$

3.2.2. Calculons en fonction de α les intégrations suivantes : $I = \int_\alpha^0 \ln(1+x)dx$ et $J = \int_\alpha^0 \ln(1-x)dx$

- $I = \int_\alpha^0 \ln(1+x)dx$
  Posons

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(1+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{1+x} \end{cases}$$

Alors

$$I = \left[x\ln(1+x)\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 \frac{x}{x+1}dx$$
$$= -\alpha\ln(1+\alpha) - \int_\alpha^0 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= -\alpha\ln(1+\alpha) - \left[x - \ln(1+x)\right]_\alpha^0$$
$$= -\alpha\ln(1+\alpha) + \left(\alpha - \ln(1+\alpha)\right)$$
$$= \alpha - (1+\alpha)\ln(1+\alpha)$$

- $J = \int_\alpha^0 \ln(1-x)dx$
  Posons

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(1-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{-1}{1-x} \end{cases}$$

Alors

$$J = \left[x\ln(1-x)\right]_\alpha^0 + \int_\alpha^0 \frac{x}{1-x}dx$$
$$= -\alpha\ln(1-\alpha) + \int_\alpha^0 \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)dx$$
$$= -\alpha\ln(1-\alpha) + \left[-x - \ln(1-x)\right]_\alpha^0$$
$$= -\alpha\ln(1-\alpha) + \left(\alpha + \ln(1-\alpha)\right)$$
$$= \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$$

3.2.3. Calculons A en fonction de α.

L'unité graphique étant de 10 cm, l'aire A exprimée en cm^2 est :

$$\begin{aligned}A &= 10\times 10\times\int_{\alpha}^{0}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x\\ &= 100\int_{\alpha}^{0}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

car $\forall x\in[\alpha,0]$, $f(x)>0$

$$\begin{aligned}&= 100\int_{\alpha}^{0}\left(\ln\left(1-x^2\right)\right)\mathrm{d}x\\ &= 100\left[\int_{\alpha}^{0}\ln\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x-\int_{\alpha}^{0}x\,\mathrm{d}x\right]\\ &= 100\left[I+J-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\alpha}^{0}\right]\\ &= 100\left(I+J+\frac{1}{2}\alpha^2\right)\\ &= 100\left(\frac{1}{2}\alpha^2+2\alpha-(1+\alpha)\ln(1+\alpha)+\right.\\ &\quad\left.(1-\alpha)\ln(1-\alpha)\right)\end{aligned}$$

3.3. Partie C

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par $u_{n+1}=2\sqrt{u_n}$ et $u_1=1$.

3.3.1. Calculons u_2 et u_3 et donnons le résultat sous la forme 2^{λ} où $(\lambda\in\mathbb{R})$

$u_2=2\sqrt{u_1}=2\sqrt{1}=2=2^1$

$u_3=2\sqrt{u_2}=2\sqrt{2}=2\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$

3.3.2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n=\ln u_n-2\ln 2$

3.3.2.1. Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \ln u_{n+1}-2\ln 2\\ &= \ln 2\sqrt{u_n}-2\ln 2\\ &= \ln 2+\ln\sqrt{u_n}-2\ln 2\\ &= \ln u_n^{\frac{1}{2}}-\ln 2\\ &= \frac{1}{2}\ln u_n-\ln 2\\ &= \frac{1}{2}(\ln u_n-2\ln 2)\\ &= \frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$

3.3.2.2. Exprimons v_n en fonction de n

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ et de premier terme

$v_1=\ln u_1-2\ln 2=\ln 1-2\ln 2=-2\ln 2$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$v_n=v_1q^{n-1}=-(2\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{2\ln 2}{2^{n-1}}=-\frac{\ln 2}{2^{n-2}}$$

3.3.2.3. En déduisons-en l'expression de u_n en fonction de n

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\ln u_n-2\ln 2=\ln u_n-\ln 4=\ln\dfrac{u_n}{4}$

$\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{v_n}=\dfrac{u_n}{4}\ \Leftrightarrow\ u_n=4\mathrm{e}^{v_n}=4\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2^{n-2}}}$

Donc $u_n=4\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2^{n-2}}}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

- Calculons la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}u_n=\lim_{x\to+\infty}4\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2^{n-2}}}$$

Posons $N=-\dfrac{\ln 2}{2^{n-2}}$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}N=0$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty}u_n=\lim_{N\to 0}4\mathrm{e}^N=4$$

1.2.2 Solution – Baccalauréat 2013

Solution 4. (p. 2)

4.1. 4.1.1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+8=0$.

$$\Delta=(-4)^2-4\times 8=16-32=-16=-4^2=-(4\mathrm{i})^2$$

D'où les solutions sont : $z_1=\dfrac{4-4\mathrm{i}}{2}=2-2\mathrm{i}$ et $z_2=\dfrac{4+4\mathrm{i}}{2}=2+2\mathrm{i}$

L'ensemble solution de cette équation est :

$$S=\{2-2\mathrm{i};2+2\mathrm{i}\}$$

4.1.2. Écrivons les solutions sous la forme trigonométrique

- $2-2\mathrm{i}$

$$\begin{aligned}|2-2\mathrm{i}| &= \sqrt{2^2+2^2}\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2-2\mathrm{i} &= 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{2\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)\end{aligned}$$

Or $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'où

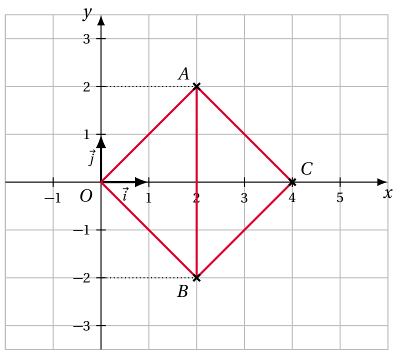
$$2-2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

- $2+2\mathrm{i}$

De la même manière, on obtient que

$$2+2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

4.2. 4.2.1. Plaçons les points A, B et C dans le plan $A(2+2\mathrm{i})$, $B(2-2\mathrm{i})$ et $C(4)$



4.2.2. Calculons $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

$$\begin{aligned}\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} &= \frac{2+2\mathrm{i}-4}{2-2\mathrm{i}-4}\\ &= \frac{-2+2\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}\\ &= \frac{2(-1+\mathrm{i})}{2(-1-\mathrm{i})}\\ &= \frac{-1+\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}}\\ &= \frac{(-1+\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}\\ &= \frac{1-\mathrm{i}-\mathrm{i}-1}{1-\mathrm{i}+\mathrm{i}+1}\\ &= -\frac{2\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{i}\end{aligned}$$

Donc CAB est un triangle rectangle isocèle en C.
O est le symétrique de C par rapport à (AB) (voir la figure).
Donc, comme CAB est un triangle rectangle isocèle en C, de même OAB est un triangle rectangle isocèle en O (on peut aussi le montrer en calculant $\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O}$, et par conséquent $AOBC$ est un carré.

4.3. 4.3.1. Écriture complexe de f.

- *Méthode 1* : par résolution
  f étant une similitude, a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$.
  Or

$$\begin{aligned} & f(C) = C\\ \Leftrightarrow\ & z_C = a z_C + b\\ \Rightarrow\ & 4 = a\times 4 + b\\ \Rightarrow\ & 4a + b = 4 \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} & f(A) = B\\ \Rightarrow\ & z_B = a z_A + b\\ \Rightarrow\ & 2-2\mathrm{i} = (2+2\mathrm{i})a + b \qquad (1.2)\end{aligned}$$

D'où le système

$$\begin{cases} 4a + b = 4 & (1.1)\\ (2+2\mathrm{i})a + b = 2-2\mathrm{i} & (1.2)\end{cases}$$

$(1.1)-(1.2)$ donne

$$\begin{aligned} & \left[4-(2+2\mathrm{i})\right]a = 4-(2-2\mathrm{i})\\ \Rightarrow\ & (2-2\mathrm{i})a = 2+2\mathrm{i}\\ \Rightarrow\ & a = \frac{2+2\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i} \qquad (1.3)\end{aligned}$$

(1.3) dans (1.2)

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & 4\mathrm{i} + b = 4\\ \Rightarrow\ & b = 4-4\mathrm{i}\end{aligned}$$

L'écriture complexe de f est donc :

$$z' = \mathrm{i}z + 4 - 4\mathrm{i}$$

- *Méthode 2* :
  Soit k et θ le rapport et l'angle respectifs de f.
  Puisque f laisse C invariant, C est le centre de f.
  En plus $f(A) = B \Rightarrow CB = kCA$ et $\theta = \operatorname{Mes}\left(\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}}\right)$
  Or $CA = CB$ et $\operatorname{Mes}\left(\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (car CAB est un triangle rectangle isocèle en C).
  $\Rightarrow\ k = 1$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$
  D'où l'écriture complexe de f est :

$$\begin{aligned} & z' - z_C = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(z - z_C\right)\\ \Rightarrow\ & z' - 4 = 1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z-4)\\ \Rightarrow\ & z' - 4 = \mathrm{i}(z-4)\\ \Rightarrow\ & z' = \mathrm{i}z + 4 - 4\mathrm{i}\end{aligned}$$

4.3.2. Éléments caractéristiques de f.

- *Méthode 1* :
  On sait que $z' = \mathrm{i}z + 4 - 4\mathrm{i}$
  - Le centre est $C(4)$ puisque C est invariant par f.
  - Le rapport k et l'angle θ vérifiant

$$\begin{aligned} & k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{i}\\ \Leftrightarrow\ & k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\\ \Leftrightarrow\ & k = 1 \quad \text{et} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$

  Donc le centre est C d'affixe 4, le rapport est $k = 1$ et l'angle $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.
- *Méthode 2* : Voir la méthode 2 de la question précédente.

4.3.3. Forme algébrique de l'affixe de G.

- *Méthode 1*
  - Déterminons d'abord l'affixe de G. $G = \operatorname{bar}\{(A,3);(B,2);(C,-3)\}$
    Donc

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{3z_A + 2z_B - 3z_C}{3+2-3}\\ &= \frac{3(2+2\mathrm{i}) + 2(2-2\mathrm{i}) - 3\times 4}{2}\\ &= \frac{6+6\mathrm{i}+4-4\mathrm{i}-12}{2}\\ &= \frac{-2+2\mathrm{i}}{2} = -1+\mathrm{i}\end{aligned}$$

  - Déduisons l'affixe de G'

Comme $G' = g(G)$, alors $z_{G'} = (1-\mathrm{i})z_G + 4\mathrm{i}$
Donc

$$\begin{aligned} z_{g'} &= (1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})+4\mathrm{i} \\ &= -1+\mathrm{i}+\mathrm{i}+1+4\mathrm{i} \\ &= 6\mathrm{i} \end{aligned}$$

- *Méthode 2*
$G' = \mathrm{bar}\{(A',3);(B',2);(C',-3)\}$ où A', B' et C' sont respectivement les images de A, B et C par f.
Car une similitude directe conserve les barycentres

$$\text{Or } \begin{cases} z_{A'} = (1-\mathrm{i})z_A + 4\mathrm{i} = (1-\mathrm{i})(2+2\mathrm{i})+4\mathrm{i} = 4+4\mathrm{i} \\ z_{B'} = (1-\mathrm{i})z_B + 4\mathrm{i} = (1-\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})+4\mathrm{i} = 0 \\ z_{C'} = (1-\mathrm{i})z_C + 4\mathrm{i} = (1-\mathrm{i})(4)+4\mathrm{i} = 4 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} z_{G'} &= \frac{3z_{A'} + 2z_{B'} - 3z_{c'}}{3+2-3} \\ &= \frac{2(4+4\mathrm{i})+2\times 0 - 3\times 4}{2} \\ &= \frac{12+12\mathrm{i}-12}{2} \\ &= 6\mathrm{i} \end{aligned}$$

Solution 5. (p. 3)

On 6 boules vertes et n boules blanches.

5.1. On donne $n=3$

5.1.1. Calculons la probabilité d'obtenir :

5.1.1.1. 2 boules de même couleur.

Nous avons au total $n+6$ boules. Et si on choisit successivement et sans remise 2, le nombre total de possibilité est $\mathrm{card}\,\Omega = A^2_{n+6} = (n+6)(n+5)$.

Soit A l'événement « les 2 boules tirés ont la même couleur »

Pour obtenir A alors on peut soit tirer 2 boules vertes parmi les 6, soit tirer 2 boules blanches parmi n.

D'où

$$\mathrm{card}\,A = A^2_6 + A^2_n = 6\times 5 + n(n-1) = n^2 - n + 30$$

Par conséquent

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}\,A}{\mathrm{card}\,\Omega} = \frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$$

Or on sait que $n=3$
D'où

$$P(A) = \frac{3^2-3+30}{(3+6)(3+5)} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$$

5.1.1.2. 2 boules de couleurs différentes.

Soit B l'événement « obtenir 2 boules de couleurs différentes »

- *Méthode 1*
Pour que B soit réalisé on doit tirer une boule blanche puis une boule verte, ou alors tirer une boule verte puis une boule blanche.
D'où

$$\mathrm{card}\,B = A^1_6 \cdot A^1_n + A^1_n \cdot A^1_6 = 6\times n + 6\times n = 12n$$

Donc

$$P(B) = \frac{\mathrm{card}\,B}{\mathrm{card}\,\Omega} = \frac{12n}{(n+6)(n+5)} = \frac{12\times 3}{72} = \frac{1}{2}$$

- *Méthode 2*
L'événement A et B sont complémentaire donc $B = \overline{A}$
Par conséquent $P(B) = 1 - P(A)$
D'où

$$P(B) = 1 - \frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)} = \frac{12n}{(n+6)(n+5)} = \frac{1}{2}$$

5.1.2. Calculons la probabilité $P(C)$ de l'événement : « la deuxième boule tirée est verte sachant que la première est verte »

Si la première boule tirée est verte, étant donné que le tirage est sans remise, il ne reste plus qu'a tirer une boule verte parmi les 2 boules vertes restantes et les n blanches.

Le nombre total de possibilité est : $N = A^1_{n+2}$ et le nombre de cas favorable est : $\mathrm{card}\,C = A^1_2 = 2$ (choisir une boule verte parmi les 2 restantes).

D'où $P(C) = \dfrac{2}{n+2}$.

Or $n=3 \Rightarrow P(C) = \dfrac{2}{5}$.

5.2. 5.2.1. $P(X = -100)$, probabilité qu'un joueur perde 100 francs, est la probabilité que le joueur tire 2 boules de couleurs différentes.

D'après la question **5.1.1.2.** on a

$$P(X=-100) = \frac{12n}{(n+6)(n+5)}$$

De même $P(X=100) = \dfrac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$.

5.2.2. Montrons que l'espérance mathématique de X est $E(X) = 100\dfrac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$.

On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x_i \left(X = x_i\right) \\ &= 100P(X=100) - 100P(X=-100) \\ &= 100\frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)} \\ &\quad -100\frac{12n}{(n+6)(n+5)} \\ &= 100\frac{n^2-n+30-12n}{(n+6)(n+5)} \\ &= 100\frac{n^2-12n+30}{(n+6)(n+5)} \end{aligned}$$

5.2.3. Déterminons les valeurs de n pour que $E(X) < 0$

$$E(X) < 0 \Longleftrightarrow n^2 - 13n + 30 < 0$$

Résolvons d'abord $x^2 - 13x + 30 = 0$

$\Delta = 13^2 - 4\times 30 = 49 = 7^2$

D'où $x = \dfrac{13-7}{2} = 3$ et $x = \dfrac{13+7}{2} = 10$

D'où $x^2 - 13x + 30 = (x-3)(x-10)$

x	0		3		10		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2-13x+30$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $n^2-13n+30<0 \Rightarrow 3<n<10$
Donc $E(X)<0 \Rightarrow n \in \{4;5;6;7;8;9\}$

Solution 6. (p. 3)

Problème

6.1. Partie A

6.1.1. Montrons que $\forall x>1$, $f(x)>1$
Pour cela étudions le signe $g(x)=f(x)-1$, pour $x>1$.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)-1 \\ &= \frac{x^2}{2x-1}-1 \\ &= \frac{x^2-2x+1}{2x-1} \\ &= \frac{(x-1)^2}{2x-1} \end{aligned}$$

Or $\forall x>1$, $(x-1)^2>0$ et $2x-1>0$ d'où $g(x)>0$.
Or

$$\begin{aligned} & g(x)=f(x)-1 \\ \Rightarrow\ & f(x)-1>0 \\ \Rightarrow\ & f(x)>1 \quad ; \forall x>1 \end{aligned}$$

6.1.2. 6.1.2.1. Démontrons par récurrence que $\forall n$, $u_n>1$

6.1.2.1.1. Pour $n=0$ on a $u_0=2>1$

6.1.2.1.2. Supposons que $u_n>1$ et montrons que $u_{n+1}>1$

$$\begin{aligned} u_n>1 &\Rightarrow f\left(u_n\right)>1 \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &\Rightarrow u_{n+1}>1 \quad \text{car } u_{n+1}=f(u_n) \end{aligned}$$

D'après **6.1.2.1.1.** et **6.1.2.1.2.**, nous déduisons donc que $\forall n$, $u_n>1$

6.1.2.2. Calculons v_1 et w_1.

Par définition $v_1=\dfrac{u_1-1}{u_1}$ et $w_1=\ln v_1$.

Or $u_1=u_{0+1}=f\left(u_0\right)=f(2)=\dfrac{2^2}{2\times 2-1}=\dfrac{4}{3}$

D'où $v_1=\dfrac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

Et $w_1=\ln v_1=\ln\dfrac{1}{4}=-\ln 4=-\ln 2^2=-2\ln 2$

6.1.2.3. Démontrons que w_n est une suite géométrique dont-on déterminera la raison et le premier terme.
Il suffit de montrer qu'il existe $q\in\mathbb{R}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$; $w_{n+1}=q\,w_n$
On a $w_{n+1}=\ln v_{n+1}$
or $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow w_{n+1} &= \ln\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}=\frac{f(u_n)-1}{f(u_n)} \\ &= \ln\left[1-\frac{1}{f(u_n)}\right] \\ &= \ln\left[1-\frac{1}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}\right] \\ &= \ln\left[1-\frac{2u_n-1}{u_n^2}\right] \\ &= \ln\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n^2} \\ &= \ln\frac{(u_n-1)^2}{u_n^2} \\ &= \ln\left[\frac{u_n-1}{u_n}\right]^2 \quad \text{or } \ln a^n=n\ln a \\ &= 2\ln\left[\frac{u_n-1}{u_n}\right] \\ &= 2\ln v_n \quad \text{car } v_n=\frac{u_n-1}{u_n} \\ &= 2w_n \quad \text{car } w_n=\ln v_n \end{aligned}$$

Ainsi $\left(w_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q=2$.

- Déterminons le premier terme w_0.

$$w_0=\ln v_0=\ln\frac{u_0-1}{u_0}=\frac{2-1}{2}=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$$

Donc $\left(w_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $w_0=-\ln 2$.

6.1.2.4. Expression de w_n puis de v_n en fonction de n.

- Pour w_n
  Rappel : Si $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n=u_0q^n$
  D'où pour ce cas,
  $$w_n=(-\ln 2)\cdot 2^n=-2^n\ln 2$$
- Pour v_n
  On sait que $\forall n\in\mathbb{N}$
  $$\begin{aligned} & w_n=\ln v_n \\ \Rightarrow\ & v_n=e^{w_n} \\ \Rightarrow\ & v_n=e^{-2^n\ln 2}=\left(e^{\ln 2}\right)^{-2^n} \\ & \text{car } e^{ab}=\left(e^a\right)^b \end{aligned}$$
  D'où
  $$v_n=(2)^{-2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \qquad \text{car } a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$$

6.1.2.5. Déduisons-en que $u_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

On a $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$; $\forall n$

$$\Rightarrow v_n\cdot u_n=u_n-1$$

$$\Rightarrow v_n \cdot u_n - u_n = -1$$
$$\Rightarrow u_n(v_n - 1) = -1$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{1-v_n}$$

Or $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$

D'où $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} = \frac{1}{1-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

Posons $N = 2^n$ alors quand $n \to +\infty$, $N \to +\infty$
D'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

6.2. Partie A

6.2.1. 6.2.1.1. Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ car la fonction $x \mapsto e^x$ croit plus vite que la fonction $x \mapsto x^n$
D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

6.2.1.2. Étudions le sens de variation de h.
h est continue et dérivable sur $D_h = [0, +\infty[$ car les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^{-x}$ le sont sur ce domaine.
Et $\forall x \in D_h$

$$h'(x) = \left(x^2\right)' e^{-x} + x^2\left(e^{-x}\right)'$$
$$= 2xe^{-x} + x^2\left(-e^{-x}\right)$$
$$= 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$$
$$= x(2-x)e^{-x} = -x(x-2)e^{-x}$$

On a le tableau de signe suivant.

x	0		2		$+\infty$
$-x$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $\forall x \in [0,2]$, $h'(x) \geq 0$ et $\forall x \in [2, +\infty[$, $h'(x) \leq 0$.

Par conséquent h est croissante sur $[0,2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$.

6.2.1.3. Tableau de variations de h.
D'après les deux questions précédentes et puisque $h(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0$ et $h(2) = 2^2e^{-2} = 4e^{-2}$, on a le tableau de variations suivant :

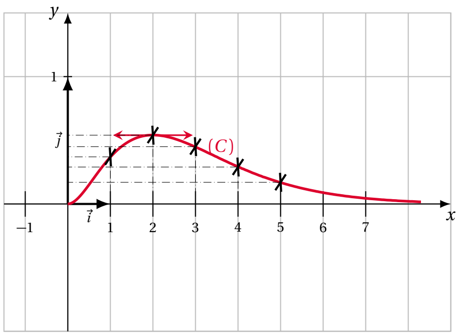
x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

6.2.1.4. Construisons (C)

- Tableau de valeurs particuliers

x	1	2	3	4	5
$h(x)$	0,37	0,54	0,45	0,29	0,17

D'où le tracé suivant.



6.2.2. 6.2.2.1. Déterminons a, b et c pour que H soit une primitive de h.
H est une primitive de h si et seulement si $\forall x \in [0, +\infty[$, $H'(x) = h(x)$
Or

$$H'(x) = \left[\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}\right]'$$
$$= \left(ax^2+bx+c\right)' e^{-x} + \left(ax^2+bx+c\right)\left(e^{-x}\right)'$$
$$= (2ax+b)e^{-x} - \left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$$
$$= \left[-ax^2 + (2a-b)x + b - c\right]e^{-x}$$

Et $h(x) = x^2e^{-x} = \left[1x^2 + 0x + 0\right]e^{-x}$
Donc $H'(x) = h(x)$, $\forall x \in [0, +\infty[$

$$\Leftrightarrow -ax^2 + (2a-b)x + b - c = 1x^2 + 0x + 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2a = -2 \\ c = b = -2 \end{cases}$$

Ainsi $a = -1$, $b = -2$ et $c = -2$

Donc

$$H(x)=\left(-x^2-2x-2\right)e^{-x}$$

6.2.2.2. Calculons $\displaystyle\int_0^{\lambda} h(x)dx$

Comme H est une primitive de h, alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{\lambda} h(x)dx &= [H(x)]_0^{\lambda}\\ &=\left[\left(-x^2-2x-2\right)e^{-x}\right]_0^{\lambda}\\ &=\left(-\lambda^2-2\lambda-2\right)e^{-\lambda}-0^2-2\cdot 0-2e^0\\ &=2-\left(\lambda^2+2\lambda+2\right)e^{-\lambda}\end{aligned}$$

6.2.2.3. Déterminons $A(\lambda)$

Comme $h(x)>0$, $\forall x\in[0,+\infty[$ et que l'unité sur les axes est de 1 cm sur l'axe des abscisse et de 4 cm sur l'axe des ordonnées.

Alors

$$A(\lambda)=1\times 4\int_0^{\lambda} h(x)dx=4\left[2-\left(\lambda^2+2\lambda+2\right)e^{-\lambda}\right]$$

(d'après la question précédente).

- Calculons $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) &= \lim_{\lambda\to+\infty} 4\left[2-\lambda^2e^{-\lambda}-2\lambda e^{-\lambda}-2e^{-\lambda}\right]\\ &=\lim_{\lambda\to+\infty} 4\left[2-\frac{\lambda^2}{e^{\lambda}}-\frac{2\lambda}{e^{\lambda}}-\frac{2}{e^{\lambda}}\right]\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda}}=0$$

(en effet $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$)

D'où

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=4[2-0-0-0]=8$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=8\,\text{cm}^2$$

6.3. Partie C

$$y''-2y'+y=x-2 \qquad (1.1)$$

$$y''-2y'+y=0 \qquad (1.2)$$

$$\text{et}\quad \phi(x)=ax+b$$

6.3.1. Déterminons a et b pour que $\phi(x)$ soit solution de (1.1)

$$\begin{aligned}&\phi(x)=ax+b\\ \Rightarrow\ &\phi'(x)=a \quad\text{et}\quad \phi''(x)=0\end{aligned}$$

ϕ est solution de (1.1)

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad \phi''(x)-2\phi'(x)+\phi(x)=x-2\\ &\Leftrightarrow 0-2a+ax+b=x-2\\ &\Rightarrow ax+b-2a=x-2;\ \forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b-2a=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-2+2a=2\times 1-2=0\end{cases}$$

Donc $a=1$, $b=0$ et $\phi(x)=x$.

6.3.2. Démontrons que g est solution de (1.1) si et seulement si $g-\phi$ est solution de (1.2).

- Supposons que g est solution de (1.1) et montrons que $g-\phi$ est solution de (1.2).
  g solution de (1.1)

$$\Rightarrow g''-2g'+g=x-2 \qquad (1.3)$$

Or on sait que ϕ est solution de (1.2)
Donc

$$\phi''-2\phi+\phi=x-2 \qquad (1.4)$$

$(1.3)-(1.4) \Rightarrow g''-\phi''+\left(-2g'-(-2\phi')\right)+g-\phi=0$
$\Rightarrow (g-\phi)''-2(g-\phi)'+g-\phi=0$
Ainsi $g-\phi$ est solution de (1.2)

- Supposons que $g-\phi$ est solution de (1.2) et montrons que g est solution de (1.1).
  $g-\phi$ est solution de (1.2)

$$\begin{aligned}&\Rightarrow (g-\phi)''-2(g-\phi)'+g+\phi=0\\ &\Rightarrow g''-\phi''-2g'+2\phi'+g-\phi=0\\ &\Rightarrow g''-2g'+g=\phi''-2\phi'+\phi\end{aligned}$$

Or $\phi''-2\phi'+\phi=x-2$ car ϕ est solution de (1.1)
Ainsi $g''-2g'+g=x-2$
Et par conséquent g est solution de (1.1).
D'où g est solution de (1.1)
D'où g est solution de (1.1) si et seulement si $g-\phi$ est solution de (1.2).

6.3.3. Résolvons (1.2)

L'équation caractéristique associé à (1.2) est $(c): r^2-2r+1=0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (r-1)^2=0\\ &\Leftrightarrow r=1\end{aligned}$$

Ainsi (c) admet une solution double $r_0=1$
D'où le terme général de la solution de (1.2) est :

$$\begin{aligned}&y=(Ax+B)e^{r_0x}\,;\ A \text{ et } B\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow\ &y=(Ax+B)e^{x}\,;\ A \text{ et } B\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Les solutions de (1.2) sont donc

$$x\mapsto (AX+B)e^x;\quad A \text{ et } B\in\mathbb{R}$$

6.3.4. Déduisons en les solutions de (1.1)

D'après la question **6.3.2.**, g est solution de (1.1) $\Leftrightarrow$ $g-\phi$ est solution de (1.2).

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow g(x)-\phi(x)=(Ax+B)e^x\\ &\quad A \text{ et } B\in\mathbb{R} \text{ d'après la question } \textbf{6.3.3.}\\ &\Leftrightarrow g(x)=(Ax+B)e^x+\phi(x)\\ &\Leftrightarrow g(x)=(Ax+B)e^x+x\end{aligned}$$

Les solutions de (1.1) sont donc

$$x\mapsto (Ax+B)e^x+x;\quad A \text{ et } B\in\mathbb{R}$$

1.2.3 Solution – Baccalauréat 2014

Solution 7. (p. 3)

7.1. Partie A

Soit le polynôme $P(z)=z^3-3z^2-3z+5+20\mathrm{i}$

7.1.1. Montrons que $1+2\mathrm{i}$ est une racine de P.
Il suffit de montrer que $P(1+2\mathrm{i})=0$
On a

$$P(1+2\mathrm{i})=(1+2\mathrm{i})^3-3(1+2\mathrm{i})^2-3(1+2\mathrm{i})+5+20\mathrm{i}$$

Or

$$\begin{aligned}(1+2\mathrm{i})^2&=(1+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})\\&=1+4\mathrm{i}+(+2\mathrm{i})^2\\&=-3+4\mathrm{i}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}(1+2\mathrm{i})^3&=(1+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})^2\\&=(1+2\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i})\\&=-3+4\mathrm{i}-6\mathrm{i}-8\\&=-11-2\mathrm{i}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}P(1+2\mathrm{i})&=-11-2\mathrm{i}-3(-3+4\mathrm{i})-3(1+2\mathrm{i})+5+20\mathrm{i}\\&=-11-2\mathrm{i}+9-12\mathrm{i}-3-6\mathrm{i}+5+20\mathrm{i}\\&=-11+9-3+5+(-2-12-6+20)\mathrm{i}\\&=0\end{aligned}$$

Ainsi $1+2\mathrm{i}$ est une racine de P.

7.1.2. Trouvons deux nombres complexes a et b tels que

$$P(z)=(z-1-2\mathrm{i})(z^2+az+b)$$

- *Méthode 1* : par identification

$$\begin{aligned}&P(z)=(z-1-2\mathrm{i})(z^2+az+b)\\&\Rightarrow P(z)=z^3+az^2+bz+(-1-2\mathrm{i})z^2\\&\qquad+a(-1-2\mathrm{i})z+b(-1-2\mathrm{i})\\&\qquad=z^3+(a-1-2\mathrm{i})z^2\\&\qquad+(b-a-2a\mathrm{i})z+b(-1-2\mathrm{i})\end{aligned}$$

Or $P(z)=z^3-3z^2-3z+5+20\mathrm{i}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-1-2\mathrm{i}=-3 & (1.1\mathrm{a})\\ b-a-2a\mathrm{i}=-3 & (1.1\mathrm{b})\\ (-1-2\mathrm{i})b=5+20\mathrm{i} & (1.1\mathrm{c})\end{cases}$$

$$(1.1\mathrm{a})\Rightarrow a=-3+1+2\mathrm{i}=-2+2\mathrm{i} \qquad (1.2)$$

(1.2) dans (1.1b)

$$\begin{aligned}&\Rightarrow b-(-2+2\mathrm{i})-2\mathrm{i}(-2+2\mathrm{i})=-3\\&\Rightarrow b+2-2\mathrm{i}+4\mathrm{i}+4=-3\\&\Rightarrow b=-9-2\mathrm{i}\qquad(1.3)\end{aligned}$$

- *Méthode 2* : division euclidienne
Comme $1+2\mathrm{i}$ est une racine de P alors $z-1-2\mathrm{i}$ est un facteur de P.

$$\begin{array}{llll}
(z^3 & -3z^2 & -3z & +5+20\mathrm{i})\div(z-1-2\mathrm{i})=z^2+(-2+2\mathrm{i})z^2+(-9-2\mathrm{i})\\
-z^3 & +(1+2\mathrm{i})z^2 & & \\
\hline
 & (-2+2\mathrm{i})z^2 & & \\
 & -(-2+2\mathrm{i})z^2 & +(-6-2\mathrm{i})z & \\
\hline
 & & (-9+2\mathrm{i})z & \\
 & & 9+2\mathrm{i}z & -5-20\mathrm{i}\\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

D'où

$$p(z)=(z-1-2\mathrm{i})\left[\left(z^2+(-2+2\mathrm{i})z+(-9-2\mathrm{i})\right)\right]$$

Ainsi

$$a=-2+2\mathrm{i} \text{ et } b=-9-2\mathrm{i}$$

7.1.3. Déduisons l'ensemble solution de l'équation $P(z)=0$

$$\begin{aligned}&P(z)=0\\&\Leftrightarrow(z-1-2\mathrm{i})\left(z^2+(-2+2\mathrm{i})z-9-2\mathrm{i}\right)=0\\&\Leftrightarrow z-1-2\mathrm{i}=0 \text{ ou } z^2+(-2+2\mathrm{i})z-9-2\mathrm{i}=0\\&\Leftrightarrow z=1+2\mathrm{i} \text{ ou } z^2+(-2+2\mathrm{i})z-9-2\mathrm{i}=0\end{aligned}$$

Résolvons

$$z^2+(-2+2\mathrm{i})z-9-2\mathrm{i}=0$$

en utilisant son discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta&=(-2+2\mathrm{i})^2-4\times(-9-2\mathrm{i})\\&=-8\mathrm{i}+36+8\mathrm{i}=36=6^2\end{aligned}$$

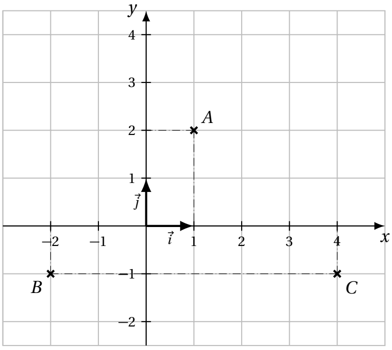
D'où

$$z=\frac{2-2\mathrm{i}-6}{2}=-2-\mathrm{i} \quad\text{ou}\quad z=\frac{2-2\mathrm{i}+6}{2}=4-\mathrm{i}$$

Ainsi $S=\{1+2\mathrm{i},\,-2-\mathrm{i},\,4-\mathrm{i}\}$

7.2. Partie B

7.2.1. Plaçons $A(1+2\mathrm{i})$, $B(-2-\mathrm{i})$ et $C(4-\mathrm{i})$



7.2.2. Montrons que A, B et D sont alignés (où $D(2+3i)$).

Il suffit de montrer que $\dfrac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\frac{d-a}{d-b} = \frac{2+3i-(1+2i)}{2+3i-(-2-i)} = \frac{1+i}{4+4i} = \frac{1+i}{4(1+i)} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$$

D'où A, B et D sont alignés

7.2.3. **7.2.3.1.** Calculons $\dfrac{b-a}{c-a}$

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{c-a} &= \frac{-2-i-(1+2i)}{4-i-(1+2i)} = \frac{-3-3i}{3-3i} \\ &= \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{-1-i-i+1}{2} = -\frac{2i}{2} = -i\end{aligned}$$

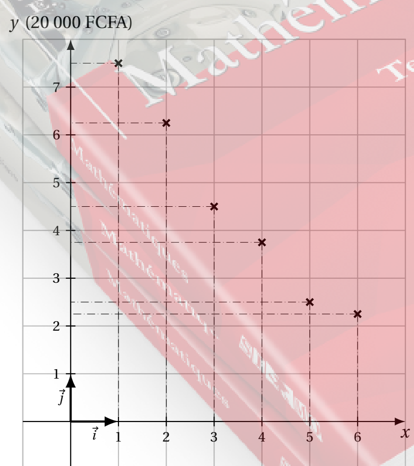
7.2.3.2. Nature exacte de ABC

On sait que si $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = \pm i$ alors ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

Dans ce cas, étant donné que $\dfrac{b-a}{c-a} = -i$, alors ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

Solution 8. (p. 4)

8.1. Représentons le nuage de points.



8.2. Coordonnées du point moyen G.

$G(\overline{x}, \overline{y})$, où $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum x_i$ et $\overline{y} = \dfrac{1}{N}\sum y_i$

Donc

$$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6}$$

et

$$\overline{y} = \frac{150+125+90+75+50+45}{6} \approx 89{,}17$$

8.3. Droite de régression de y en x en utilisant la méthode des moindres carrés.

Cette équation est donnée par

$$y - \overline{y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}(x - \overline{x})$$

où

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{1}{N}\sum x_i^2 - (\overline{x})^2 \\ &= \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} \\ &\quad -3{,}5^2 \approx 2{,}92\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y} \\ &= \frac{150+2\times125+3\times90+4\times74}{6} \\ &\quad + \frac{5\times50+6\times45}{6} \\ &\quad -3{,}5\times89{,}17 \approx -63{,}76\end{aligned}$$

D'où

$$y - 89{,}17 = \frac{-63{,}76}{2{,}92}(x-3{,}5)$$

$$\Leftrightarrow y \approx -21{,}84x + 165{,}6$$

8.4. Estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation.

Pour $x = 7$

$$y \approx -21{,}84\times7 + 165{,}6 \approx 12{,}72$$

Ainsi après 7 ans d'utilisation, le prix de la machine sera environ 12 720 FCFA

Solution 9. (p. 4)

Problème

$$f(x) = \frac{e^x}{x+2}, \quad \forall x \neq -2$$

9.1. Partie A

9.1.1. Limite de f aux bornes de son domaine de définition D_f.

f existe ssi $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

D'où $D_f = \mathbb{R}\{-2\} =]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} e^x \times \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0\times0 = 0$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-}\frac{e^x}{x+2} = e^{-2}\lim_{x\to-2^-}\frac{1}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+}\frac{e^x}{x+2} = e^{-2}\times\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

9.1.2. Étude et tableau des variations de f.

$f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$. Donc f est dérivable que $\mathbb{R} - \{-2\}$.
Et $\forall x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{(e^x)'(x+2) - (x+2)'e^x}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$$

Or $\forall x \in D_f$, $\dfrac{e^x}{(x+2)^2} > 0$; donc $f'(x)$ est de même signe que $x+1$ sur D_f.
On a donc le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	-2		-1	$-\infty$
$x+1$	$-$	||	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	||	$-$	0	$+$

D'où f est décroissante sur $]-\infty, -2[$ et $]-2, -1]$ et est croissante sur $[-1, +\infty[$.
Aussi $f(-1) = \dfrac{e^{-1}}{-1+2} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.
D'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-2		-1		$-\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$		||	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

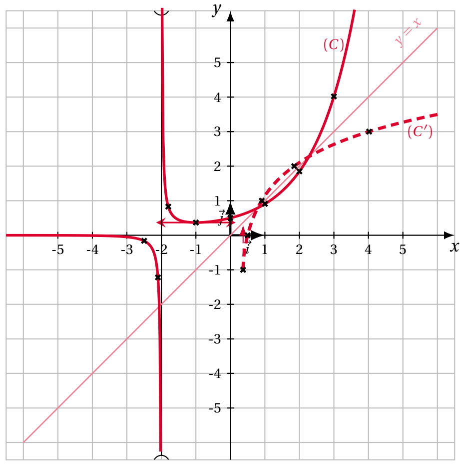
9.1.3. Montrons que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
Étant donné que f est continue et strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, g est continue et strictement croissante sur I.
Ainsi g définit une bijection de I sur $g(I)$.

$$g(I) = f(I) = \left]f(-1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$$

9.1.4. Traçons (C) et (C') dans un même repère
Quelques valeurs particulières

x	$-2{,}5$	$-2{,}1$	$-1{,}8$	0	1	2	3
$f(x)$	$-0{,}16$	$-1{,}22$	$0{,}83$	$0{,}5$	$0{,}91$	$1{,}85$	$4{,}02$

On a donc le tracé suivant



N.B : (C') est le symétrique de la partie de (C), pour les $x > -1$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ (1^{er} bissectrice).

9.2. Partie B

9.2.1. Image par f de $[0,1]$
La restriction de f sur $[0,1]$ est continue et strictement croissante.
Donc $f([0,1]) = [f(0), f(1)]$
Or $f(0) = \dfrac{e^0}{0+2} = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \dfrac{e}{1+2} = \dfrac{e}{3}$
D'où

$$f([0,1]) = \left[\frac{1}{2}, \frac{e}{3}\right]$$

9.2.2. Calculons f'' et vérifions que $\forall x \in [0,1]$; $f''(x) > 0$
On a obtenu précédemment que $f'(x) = \dfrac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$
Donc

$$f''(x) = \frac{\left((x+1)e^x\right)'(x+2)^2 - \left[(x+2)^2\right](x+1)e^x}{(x+2)^4}$$
$$= \frac{\left(e^x + (x+1)e^x\right)(x+2)^2 - 2(x+2)(x+1)e^x}{(x+2)^4}$$
$$= \frac{(x+2)e^x\left[(x+2)(x+2) - 2(x+1)\right]}{(x+2)^4}$$
$$= \frac{e^x\left(x^2+4x+4-2x-2\right)}{(x+2)^3}$$
$$= \frac{e^x\left(x^2+2x+2\right)}{(x+2)^3}$$

Or $\forall x \in [0,1]$ $e^x > 0$, $x^2+2x+2 > 0$ et $x+2 > 0$
Donc $f''(x) > 0$.

9.2.3. Déduisons que $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{4} \le f'(x) \le \dfrac{2}{3}$.
Puisque $f''(x) > 0$, $\forall x \in [0,1]$
Alors f' est croissante sur $[0,1]$
Et par conséquent $\forall x \in [0,1]$, $f'(0) \le f'(x) \le f'(1)$
Or $f'(0) = \dfrac{e^0(0+1)}{(0+1)^2} = \dfrac{1}{4}$ et $f'(1) = \dfrac{(1+1)e}{(1+2)^2} = \dfrac{2e}{9}$

D'où $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2e}{9} \leq \frac{2\times 3}{9}$ car $e \leq 3$.

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}; \quad \forall x \in [0,1]$$

9.2.4. Démontrons que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0,1]$

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

Posons $g(x) = f(x) - x$
Alors $g'(x) = f'(x) - 1$
Or

$$\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4} - 1 \leq f'(x) - 1 \leq \frac{2}{3} - 1$$
$$\Rightarrow -\frac{3}{4} < g'(x) \leq -\frac{1}{3}; \quad \forall x \in [0,1]$$

Ainsi g est strictement décroissante sur $[0,1]$. Étant donné que f est continue sur $[0,1]$, g est également continue sur $[0,1]$
Aussi

$$g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} > 0$$

Et

$$g(1) = f(1) - 1 = \frac{e}{3} - 1 = \frac{e-1}{3} < 0 \quad \text{car } e < 3$$

Donc g est continue et strictement décroissante, $g(0)$ et $g(1)$ sont de signes opposés.
D'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0,1]$.

9.3. Partie C

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

9.3.1. Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

- Montrons d'abord que $\forall n;\ u_n \in [0,1]$.

  On a $u_0 = \frac{1}{2} \in [0,1]$

  Supposons $u_n \in [0,1]$ et montrons que $u_{n+1} \in [0,1]$

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f([0,1]) = \left[\frac{1}{2}, \frac{e}{3}\right] \subset [0,1]$$

- Montrons à présent que (u_n) est croissante

$$u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}+2} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2e^{\frac{1}{2}}}{5} \geq \frac{1}{2}$$

  Donc $u_1 \geq u_0$
  Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ u_n \in [0,1]$ et que f est décroissante sur $[0,1]$, alors

$$u_n > u_{n+1}$$
$$\Rightarrow f(u_n) \geq f(u_{n+1})$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

- Montrons que $\forall n,\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$u_0 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

  Supposons que $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et montrons que $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

  Comme f est croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

  Alors

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(1)$$
$$\Rightarrow f(0) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(1)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(u_n) \leq \frac{e}{3} \leq 1$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

- Puisque (u_n) est croissante et majorée par 1, alors (u_n) est convergente.

9.3.2. Démontrons que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nous avons établi à la question **9.2.3.** que

$$\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}, \quad \forall x \in [0,1]$$

Or $\alpha \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.
D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires
On a

$$\frac{1}{4}|u_n - \alpha| \leq |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$$
$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$$

Car $u_{n+1} = f(u_n)$
et $f(\alpha) - \alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha$

9.3.3. Déduisons que $\forall n,\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Nous allons procéder par récurrence.

- Pour $n = 0$

  On a $u_0 = \frac{1}{2}$

  et $\alpha \in [0,1] \Rightarrow \alpha - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

- Supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha| \leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

9.3.4. Déterminons la limite de u_n.

On a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left|u_n-\alpha\right| \le \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(u_n-\alpha\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} u_n=\alpha$$

1.2.4 Solution – Baccalauréat 2015

Solution 10. (p. 4)

Soit

$$t(z)=9z^4-24z^3+50z^2-24z+41$$

10.1. Montrons que si z_0 est une racine de t alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de t.
Soit z_0 une racine de t ; alors $t(z_0)=0$. Montrons que $t(\overline{z_0})=0$

$$\begin{aligned}
&t(z_0)=0\\
\Leftrightarrow\ &9z_0^4-24z_0^3+50z_0^2-24z_0+41=0\\
\Leftrightarrow\ &\overline{9z_0^4-24z_0^3+50z_0^2-24z_0+41}=\overline{0}=0\\
\Leftrightarrow\ &9(\overline{z_0})^4-24(\overline{z_0})^3+50(\overline{z_0})^2-24\overline{z_0}+41=0
\end{aligned}$$

Car $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$, $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z}$ et $\overline{kz}=k\overline{z}\ (k\in\mathbb{R})$.
D'où $t(\overline{z_0})=0$ et donc $\overline{z_0}$ est aussi une racine de t.

10.2. Vérifions que si i est une racine de t

$$\begin{aligned}
t(\mathrm{i})&=9\mathrm{i}^4-24\mathrm{i}^3+50\mathrm{i}^2-24\mathrm{i}+41\\
&=9\times1-24(-\mathrm{i})+50(-1)-24\mathrm{i}+41\\
&=9+24\mathrm{i}-50-24\mathrm{i}+41\\
&=50-50+24\mathrm{i}-24\mathrm{i}=0
\end{aligned}$$

D'où i est une racine de t.

- Déduisons l'autre racine de t.
  D'après la question précédente $\bar{\mathrm{i}}$ est aussi racine de t
  Or $\bar{i}=-\mathrm{i}$
  Ainsi $-\mathrm{i}$ est l'autre racine de t.

10.3. Déterminons trois nombres complexes a, b et c tels que

$$t(z)=(z^2+1)(az^2+bz+c),\quad \forall z\in\mathbb{C}$$

- *Méthode 1* : Par identification

$$\begin{aligned}
(z^2+1)(az^2+bz+c)&=az^4+bz^3+cz^2\\
&\quad+bz+c\\
&=az^4+bz^3\\
&\quad+(c+a)z^2+bz+c
\end{aligned}$$

Or $t(z)=9z^4-24z^3+50z^2-24z+41$
D'où

$$\begin{cases}a=9\\ b=-24\\ a+c=50\\ b=-24\\ c=41\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=9\\ b=-24\\ c=41\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=9,\ b=-24 \text{ et } c=41$$

- *Méthode 2* : Division euclidienne

$$\begin{array}{l}
(\ 9z^4-24z^3+50z^2-24z+41\ )\div(z^2+1)=9z^2-24z+41\\
\underline{-9z^4\qquad\quad -9z^2}\\
\qquad -24z^3+41z^2-24z\\
\qquad \underline{24z^3\qquad\quad +24z}\\
\qquad\qquad 41z^2\qquad +41\\
\qquad\qquad \underline{-41z^2\qquad -41}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

D'où

$$9z^4-24z^3+50z^2-24z+41=(z^2+1)(9z^2-24z+41)$$

Ainsi $a=9$, $b=-24$ et $c=41$

10.4. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $t(z)=0$

$$\begin{aligned}
&t(z)=0\\
\Leftrightarrow\ &(z^2+1)(9z^2-24z+41)=0\\
\Leftrightarrow\ &z^2+1=0 \quad\text{ou}\quad 9z^2-24z+41=0\\
\Leftrightarrow\ &z^2=-1=\mathrm{i}^2 \quad\text{ou}\quad 9z^2-24z+41=0\\
\Leftrightarrow\ &z=\mathrm{i} \quad\text{ou}\quad z=-\mathrm{i} \quad\text{ou}\quad 9z^2-24z+41=0
\end{aligned}$$

$$\Delta=24^2-4\times9\times41=-900=(30\mathrm{i})^2$$

D'où

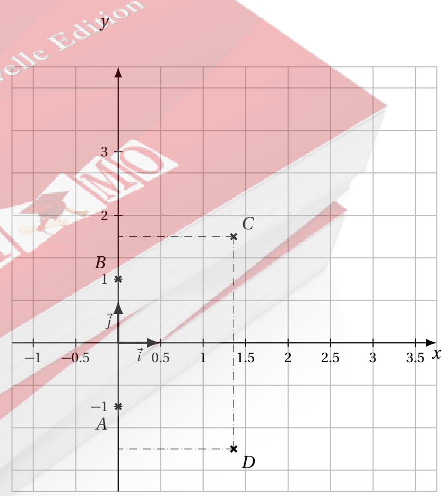
$$z=\frac{24-30\mathrm{i}}{2\times9}=\frac{4}{3}-\frac{5}{3}\mathrm{i}\qquad\text{ou}\qquad z=\frac{24+30\mathrm{i}}{2\times9}=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\mathrm{i}$$

Ainsi l'ensemble solution de $t(z)=0$ est :

$$S=\left\{-\mathrm{i},\mathrm{i},\frac{4}{3}-\frac{5}{3}\mathrm{i},\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\mathrm{i}\right\}$$

10.5. $z_A=-\mathrm{i}$, $z_B=\mathrm{i}$, $z_C=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\mathrm{i}$, $z_D=\frac{4}{3}-\frac{5}{3}\mathrm{i}$

10.5.1. Plaçons les points A, B, C et D.



10.5.2. Montrons que $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$ et $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in i\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} &= \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}i + i}{\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i + i} \\
&= \frac{\frac{4}{3} + \frac{8}{3}i}{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}i} \\
&= \frac{4+8i}{4-2i} \\
&= \frac{2+4i}{2-i} \\
&= \frac{(2+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\
&= \frac{4+2i+8i-4}{5} \\
&= \frac{10}{5}i = 2i \in i\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} &= \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}i - i}{\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i - i} \\
&= \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}i}{\frac{4}{3} - \frac{8}{3}i} = \frac{4+2i}{4-8i} \\
&= \frac{2+i}{2-4i} = \frac{(2+i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} \\
&= \frac{4+8i+2i-4}{4+16} \\
&= \frac{10i}{20} = \frac{1}{2}i \in i\mathbb{R}
\end{aligned}$$

10.5.3. Déduisons la nature de ACD et CBD

Rappel : Si $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in i\mathbb{R}$ alors ABC est un triangle rectangle en B

D'où d'après la question précédente, ACD est un triangle rectangle en A et CBD est un triangle rectangle en B.

10.5.4. Montrons que A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Rappel : Si ABC est un triangle rectangle en A alors les points A, B et C appartiennent au cercle de diamètre $[BC]$.

Comme ACD est rectangle en A alors A, C et D appartiennent tous au cercle de diamètre $[CD]$. De même, comme CBD est rectangle en B, alors C, B et D appartiennent au cercle de diamètre $[CD]$.
Ainsi A, B, C et D appartiennent tous au cercle de diamètre $[CD]$ qui est encore le cercle de centre Ω, milieu de $[CD]$ et de rayon $r = \dfrac{CD}{2}$.

D'où

$$z_\Omega = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad r = \frac{CD}{2} = \frac{5}{3}$$

Ainsi A, B, C et D appartiennent au cercle de centre Ω, d'affixe $z_\Omega = \dfrac{4}{3}$ et de rayon $r = \dfrac{5}{3}$.

Solution 11. (p. 4)

11.1. 11.1.1. Calculons la probabilité P_1 d'obtenir deux jetons de même couleur.
Lorsqu'on tire simultanément deux jetons sur 10, le nombre total de possibilité est $N = C_{10}^2 = 45$.
Pour obtenir deux jetons de même couleurs on peut soit obtenir 2 jetons rouges (sur les 6 jetons rouges) soit 2 jetons jaunes (sur les 4 jetons jaunes)
D'où le nombre de cas favorable est

$$n_1 = C_6^2 + C_4^2 = 15 + 6 = 21$$

ainsi

$$P_1 = \frac{n_1}{N} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

11.1.2. Calculons la probabilité P_2 d'obtenir deux jetons de couleurs différentes.

- *Méthode 1*
  Pour obtenir 2 jetons de couleurs différents, il faut obtenir un jetons de couleur rouge sur les 6 et 1 jeton jaune sur les 4 : le nombre de cas favorable est donc :

  $$n_2 = C_6^1 \times C_4^1 = 6 \times 4 = 24$$

  D'où

  $$P_2 = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

- *Méthode 2*
  Lorsqu'on tire deux jetons on obtient soit deux jetons de même couleur, soit deux jetons de couleur différentes. Ainsi les deux événements A « obtenir deux jetons de même couleur » et B « obtenir deux jetons de couleurs différentes » sont contraires
  Ainsi

  $$P_1 + P_2 = 1 \Leftrightarrow P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

11.1.3. 11.1.3.1. Différentes valeurs possibles de X.
Soit on obtient deux jetons de même couleur et on gagne 1000 FCFA et dans ce cas X vaut 1000. Soit obtient deux jetons de couleur différente et perd 1000 FCFA, dans ce cas X vaut -1000.
Les valeurs possibles de X sont donc 1000 et -1000. On note

$$X(\Omega) = \{1000, -1000\}$$

11.1.3.2. Loi de probabilité de X.
$P(X = 1000)$, la probabilité du gain, est encore la probabilité d'obtenir 2 jetons de même couleur donc

$$P(X = 1000) = P_1 = \frac{7}{15}$$

De même

$$P(X = -1000) = \frac{8}{15}$$

La loi de probabilité de X est donc

k	1000	-1000
$P(X=k)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{15}$

11.1.3.3. Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum kP(X=k)\\ &= 1000\times\frac{7}{15}-1000\times\frac{8}{15}\\ &= -\frac{1000}{15}=-\frac{200}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(X) &= \sum k^2P(X=k)-\left(E(X)\right)^2\\ &= \left(1000^2\times\frac{7}{15}+1000^2\times\frac{8}{5}\right)-\left(\frac{200}{5}\right)^2\\ &= 1000^2-\left(\frac{200}{3}\right)^2\approx 995\,556\end{aligned}$$

Solution 12. (p. 5)

Problème

12.1. Partie A

$$y''-4y=16x+16 \qquad \text{(E)}$$

12.1.1. Résolvons l'équation homogène

$$y''-4y=0 \qquad \text{(E')}$$

associé à (E)
L'équation caractéristique associé à (E') est $r^2-4=0$ qui admet deux solutions réelles $r_1=2$ et $r_2=-2$.
Ainsi le terme général de la solution de (E') est

$$x\mapsto Ae^{2x}+Be^{-2x} \quad (A,B\in\mathbb{R})$$

12.1.2. Déterminons α et β tels que $P(x)=\alpha x+\beta$ soit une solution particulière de (E).
P est solution particulière de (E)

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow P''(x)-4P(x)=16x+16\\ &\qquad \text{or } P(x)=\alpha x+\beta,\ P'(x)=\alpha \text{ et } P''(x)=0\\ &\Leftrightarrow 0-4(\alpha x+\beta)=16x+16\\ &\Leftrightarrow \alpha x+\beta=-4x-4\\ &\Leftrightarrow \alpha=-4 \quad \text{et} \quad \beta=-4\end{aligned}$$

12.1.3. Montrons que f est solution de (E) si et seulement si $f-P$ est une solution de (E')
f est solution de (E)

$$\Leftrightarrow\ f''-4f=16x+16$$

Or $16x+16=P''-4P$ car P est solution de (E)

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow f''-4f=P''-4P\\ &\Leftrightarrow f''-P''-4f+4f=0\\ &\Leftrightarrow (f-P)''-4(f-P)=0\\ &\Leftrightarrow f-P \quad \text{est solution de (E')}\end{aligned}$$

12.1.4. Déduisons toutes les solutions de (E)

D'après **12.1.3.** f est solution de (E) si et seulement si $f-P$ est solution de (E').

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow f(x)-P(x)=Ae^{2x}+Be^{-2x}\\ &\qquad \text{d'après la question } \textbf{12.1.1.}\\ &\Leftrightarrow f(x)=Ae^{2x}+Be^{-2x}+P(x)\\ &\qquad\quad = Ae^{2x}+Be^{-2x}-4x-4\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$x\mapsto Ae^{2x}+Be^{-2x}-4x-4$$

où A et B sont des réels quelconques.

12.1.5. Déterminons la solution qui vérifie $f(0)=4$ et $f'(0)=-4$

$$\begin{aligned}f(x) &= Ae^{2x}+Be^{-2x}-4x-4\\ f'(x) &= 2Ae^{2x}-2Be^{-2x}-4\end{aligned}$$

Ainsi $f(0)=4$ et $f'(0)=-4$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \begin{cases}A+B-4=4\\ 2A-2B-4=-4\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}A+B=8\\ A-B=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow A=B=4\end{aligned}$$

D'où

$$f:\mapsto 4e^{2x}+4e^{-2x}-4x-4$$

12.2. Partie B

$$g(x)=e^{2x}+3e^{-2x}-4$$

12.2.1. Montrons que

$$g(x)=e^{-2x}\left(e^{4x}-4e^{2x}+3\right)$$

$$\begin{aligned}e^{-2x}\left(e^{4x}-4e^{2x}+3\right) &= e^{-2x}\times e^{4x}\\ &\quad -4e^{-2x}e^{2x}+3e^{-2x}\\ &= e^{2x}-4+3e^{-2x}\\ &= e^{2x}+3e^{-2x}-4\\ &= g(x)\end{aligned}$$

12.2.2. Étudions le signe de $g(x)$

$$g(x)=e^{-2x}\left(e^{4x}-4e^{2x}+3\right)$$

Comme $e^{-2x}>0$, alors $g(x)$ et $e^{4x}-4e^{2x}+3$ sont de même signe.
Posons $X=e^{2x}$; alors

$$e^{4x}-4e^{2x}+3=X^2-4X+3=(X-1)(X-3)$$

D'où

$$e^{4x}-4e^{2x}+3=\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{2x}-3\right)$$

$$\begin{aligned}&e^{2x}-1<0\\ \Leftrightarrow\ &e^{2x}<1\\ \Leftrightarrow\ &2x<\ln 1\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x<0$$

$$\begin{aligned}&e^{2x}-3<0\\ \Leftrightarrow\ & e^{2x}<3\\ \Leftrightarrow\ & 2x<\ln 3\\ \Leftrightarrow\ & x<\frac{\ln 3}{2}\end{aligned}$$

On a le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	0	$\frac{\ln 3}{2}$	$+\infty$
e^{-2x}	$+$	$+$	$+$	
$e^{2x}-1$	$-$ 0	$+$	$+$	
$e^{2x}-3$	$-$	$-$ 0	$+$	
$g(x)$	$+$ 0	$-$ 0	$+$	

Ainsi $g(0)=g\left(\frac{\ln 3}{2}\right)=0$

$$g(x)>0 \quad \text{sur} \quad]-\infty,0[\cup\left]\frac{\ln 3}{2},+\infty\right[$$

$$g(x)<0 \quad \text{sur} \quad \left]0,\frac{\ln 3}{2}\right[$$

12.2.3.

$$h(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}e^{-2x}-4x$$

12.2.3.1. Montrons que

$$h(x)=e^{2x}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-4x}-4xe^{-2x}\right)$$

$$=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}e^{4x}-\frac{3}{2}-4xe^{2x}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned}&e^{2x}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-4x}-4xe^{-2x}\right)\\ &=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}e^{2x}e^{-4x}-4xe^{2x}e^{-2x}\\ &=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}e^{-2x}-4x\\ &=h(x)\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}&e^{-2x}\left(\frac{1}{2}e^{4x}-\frac{3}{2}-4xe^{2x}\right)\\ &=\frac{1}{2}e^{-2x}e^{4x}-\frac{3}{2}e^{-2x}-4xe^{-2x}e^{2x}\\ &=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}e^{-2x}-4x\\ &=h(x)\end{aligned}$$

D'où

$$h(x)=e^{2x}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-4x}-4xe^{-2x}\right)$$

$$=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}e^{4x}-\frac{3}{2}-4xe^{2x}\right)$$

12.2.3.2. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$

■ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}h(x)&=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-4x}-4xe^{-2x}\right)\\ &=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}\times\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-4x}-4xe^{-2x}\right)\\ &=(+\infty)\times\left(\frac{1}{2}-0-0\right)\\ &=+\infty\end{aligned}$$

■ $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}h(x)&=\lim_{x\to-\infty}e^{-2x}\left(\frac{1}{2}e^{4x}-\frac{3}{2}-4xe^{2x}\right)\\ &=\lim_{x\to-\infty}e^{-2x}\times\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{4x}-\frac{3}{2}-4xe^{2x}\right)\\ &=(+\infty)\times\left(0-\frac{3}{2}-0\right)\\ &=-\infty\end{aligned}$$

12.2.3.3. Montrons que $\forall x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=g(x)$
h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
Et $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}h'(x)&=\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}e^{-2x}-4x\right)'\\ &=\frac{1}{2}\times 2e^{2x}-\frac{3}{2}\times(-2)e^{-2x}-4\\ &=e^{2x}+3e^{-2x}-4=g(x)\end{aligned}$$

12.2.3.4. Déduisons le tableau de variations de h.
D'après le tableau de signe de g établi précédemment, et d'après les limites calculées on a :

x	$-\infty$		0		$\frac{\ln 3}{2}$		$+\infty$
$h'(x)=g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$1-2\ln 3$	↗	$+\infty$

12.2.3.5. Montrons que l'équation $h(x)$ admet une unique solution α telle que $\alpha\in]1,2[$.
D'après le tableau de variations de h, la restriction de h sur $\left]-\infty,\frac{\ln 3}{2}\right]$ admet un maximum $h(0)=-1$
Donc

$$\forall x\in\left]-\infty,\frac{\ln 3}{2}\right],\quad h(x)\leq-1<0$$

Ainsi l'équation $h(x)=0$ n'admet aucune solution sur $\left]-\infty, \frac{\ln 3}{2}\right]$

La restriction de h sur $\left]\frac{\ln 3}{2}, +\infty\right[$ est continue et strictement croissante donc définit une bijection de $\left]\frac{\ln 3}{2}, +\infty\right[$ vers $h\left(\left]\frac{\ln 3}{2}, +\infty\right[\right) =]1-2\ln 3, +\infty[$ comme $0 \in]1-2\ln 3, +\infty[$ alors il existe un unique $\alpha \in \left]\frac{\ln 3}{2}, +\infty\right[$ tel que $h(\alpha)=0$.
Donc $h(x)=0$ admet une unique solution α.
De plus

$$h(1)=\frac{1}{2}e^{2}-\frac{3}{2}e^{-2}-4 \approx -0{,}51<0$$

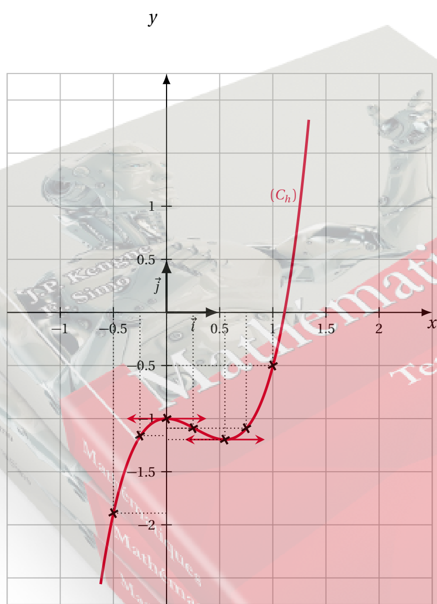
$$h(2)=\frac{1}{2}e^{4}-\frac{3}{2}e^{-4}-8 \approx 19{,}3>0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & h(1)<0<h(2) \\ \Rightarrow\ & h(1)<h(\alpha)<h(2) \\ \Rightarrow\ & 1<\alpha<2 \quad \text{car } h \text{ est croissante sur }]1,2[\end{aligned}$$

12.2.3.6. Construction de la courbe (C_h) de h.
Tableau de valeurs particulières

x	$-0{,}5$	$-0{,}25$	$0{,}25$	$0{,}75$	1
$h(x)$	$-1{,}89$	$-1{,}16$	$-1{,}09$	$-1{,}09$	$-0{,}5$



12.2.4. Aire A de la partie du plan délimité par (C_h), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$, et $x=\frac{1}{2}\ln 3$
Comme l'unité sur les axes est de 3 cm et que h est négatif sur $\left]0, \frac{\ln 3}{2}\right[$

$$\begin{aligned} A &= 3\times 3\times \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} |h(x)|\,dx\ (\text{cm}^2) \\ &= -9\int_0^{\frac{\ln 3}{2}} h(x)dx \\ &= -9\int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}e^{-2x}-4x\right)dx \\ &= -9\left[\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{3}{4}e^{-2x}-2x^2\right]_0^{\frac{\ln 3}{2}} \\ &= -9\left(\frac{1}{4}e^{\frac{2\ln 3}{2}}+\frac{3}{4}e^{-\frac{2\ln 3}{2}}-2\left(\frac{\ln 3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right) \\ &= -9\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}-\frac{(\ln 3)^2}{2}-1\right) \\ &= -9\left(-\frac{(\ln 3)^2}{2}\right) \\ A &= \frac{9}{2}(\ln 3)^2\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

1.2.5 Solution – Baccalauréat 2016

Solution 13. (p. 5)

13.1. Calculons les coordonnées du point moyen G
$G(x_G, y_G)$ où

$$x_G = \frac{150+159+158+160+165}{10} + \frac{168+170+172+175+171}{10} = 164{,}8$$

$$y_G = \frac{40+41+43+43+42}{10} + \frac{44+44+44{,}5+44{,}5+44}{10} = 43$$

Ainsi $G(164{,}8;43)$

13.2. **13.2.1.** Calculons le coefficient de corrélation linéaire r

$$r=\frac{\text{Cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

Or $\text{Cov}(x,y)=9{,}6$; $\sigma_x=7{,}4$; $\sigma_y=1{,}4$

D'où $r=\dfrac{9{,}6}{7{,}4\times 1{,}4}=0{,}9266$

13.2.2. Donnons une équation cartésienne de l'ajustement linéaire de y en x en utilisant la méthode des moindre carrés.
On sait que la droite de régression de y en x est de la forme $y=ax+b$

$$\text{où } a=\frac{\text{Cov}(x,y)}{V(x)} \text{ et } V(x)=\sigma_x^2.$$

Aussi comme G appartient à cette droite on a

$Y_G = a x_G + b \Rightarrow b = y_G - a x_G$.

D'où $a = \dfrac{9{,}6}{7{,}4^2} \approx 0{,}175$

$$b = 43 - 0{,}175 \times 164{,}8 = 14{,}16$$

D'où l'équation $y = 0{,}175x + 14{,}16$

13.2.3. Déduisons au centième près la pointure d'un élève dont la taille est de 163 cm.

Il s'agit de déterminer, en utilisant l'équation cartésienne précédente, la valeur de y lorsque $x = 163$

$$y = 0{,}175 \times 163 + 14{,}16 \approx 42{,}68$$

La pointure d'un élève de taille 163 cm sera donc d'environ 42,68

13.3. 13.3.1. Posons A l'événement « 3 élèves ont une pointure d'au moins 44 cm. Il est question de calculer $P(A)$. »

On sait que $P(A) = \dfrac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$

Étant donné qu'on tire simultanément 6 élèves parmi 10, le cardinal de l'univers est $\operatorname{card}\Omega = C_{10}^6$

Aussi avoir 3 élèves dont la pointure est au moins 44 cm, revient à choisir 3 élèves parmi les 5 qui ont une pointure supérieure on égale à 44 cm, et choisir 3 élèves parmi les 5 dont la pointure est intérieure à 44 cm.

Ainsi $\operatorname{card} A = C_5^3 \times C_5^3$

D'où

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{C_5^3 \times C_5^3}{C_{10}^6}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{5!}{3!2!}\right)^2}{\left(\dfrac{10!}{6!4!}\right)} = \frac{\left(\dfrac{5\times 4}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2}\right)}$$

$$= \frac{10^2}{210} = \frac{10}{21}$$

13.3.2. Calculons la probabilité de l'événement : « la taille est supérieure ou égale à 160 cm sachant que la pointure est inférieure on égale à 44 cm », lorsque choisir au hasard un élève parmi les dix.

Posons les événements :

A : « La taille est supérieure ou égale à 160 cm »

B : « La pointure est inférieure ou égale à 44 cm »

Il s'agit donc de calculer $p = P(A|B)$.

Or on sait que $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Calculons $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = \frac{\operatorname{card} A \cap B}{\operatorname{card}\Omega}$$

$\operatorname{cond} A \cap B = 5$ (il y' a 5 élèves dont la taille est supérieure à 160 et la pointure inférieure on égale à 44 cm ; il s'agit des couples : (160; 43), (165; 42), (168, 44), (170; 44), (171; 44))

Et $\operatorname{cond}\Omega = 10$ (on a 10 élèves au total)

Donc $P(A \cap B) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

Calculons $P(B)$

$$P(A \cap B) = \frac{\operatorname{card} B}{\operatorname{card}\Omega}$$

or $\operatorname{card} B = 8$ (8 élèves sur les 10 ont une pointure inférieure ou égale à 44 cm)

$$P(B) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Ainsi $p = P(A|B) = \dfrac{1}{2}\Big/\dfrac{4}{5} = \dfrac{5}{8}$

Solution 14. (p. 5)

14.1. Résolvons l'équation $4z^2 - 12z + 153 = 0$ dans $\mathbb{C}$

Le discriminant est

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 153 = -2304$$
$$= -48^2 = (48i)^2$$

D'où

$$z = \frac{12 - 48i}{2 \times 4} \quad \text{ou } z = \frac{12 + 48i}{2 \times 4}$$
$$z = \frac{3}{2} - 6i \quad \text{ou } z = \frac{3}{2} + 6i$$

L'ensemble solution de l'équation est donc

$$S = \left\{\frac{3}{2} - 6i, \frac{3}{2} + 6i\right\}$$

14.2. $A\left(\dfrac{3}{2} + 6i\right)$, $B\left(\dfrac{3}{2} - 6i\right)$, $C\left(-3 - \dfrac{1}{4}i\right)$, $P(3 + 2i)$, $\vec{w}\left(-1 + \dfrac{5}{2}i\right)$

14.2.1. Déterminons l'affixe z_Q du point Q, image B par la translation t de vecteur $\vec{w}$.

$$Q = t(B) \Leftrightarrow \vec{BQ} = \vec{w}$$
$$\Leftrightarrow z_Q - z_B = z_{\vec{w}}$$
$$\Leftrightarrow z_Q = z_B + z_{\vec{w}} = \frac{3}{2} - 6i - 1 + \frac{5}{2}i$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$$

14.2.2. Déterminons l'affixe z_R du point R, image P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\dfrac{1}{3}$

$$n = h(P) \Leftrightarrow \vec{CR} = -\frac{1}{3}\vec{CP'}$$
$$\Leftrightarrow (z_R - z_C) = -\frac{1}{3}(z_P - z_C)$$
$$\Leftrightarrow z_R = z_C - \frac{1}{3}(z_P - z_C)$$
$$= -3 - \frac{1}{4}i - \frac{1}{3}\left(3 + 2i + 3 + \frac{1}{4}i\right)$$
$$= -3 - \frac{1}{4}i - \frac{1}{3}\left(6 + \frac{9}{4}i\right)$$
$$= -3 - \frac{1}{4}i - 2 - \frac{3}{4}i = -5 - i$$

Donc $z_R = -5 - i$

14.2.3. Déterminons l'affixe z_S du point S, image de P par la rotation r de centre A et d'angle $-\pi/2$

$$S = r(P) \Leftrightarrow z_S - z_A = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A)$$
$$\Leftrightarrow z_S = z_A + \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A)$$

$$= \frac{3}{2} + 6i - i\left(3 + 2i - \frac{3}{2} - 6i\right)$$
$$= \frac{3}{2} + 6i - i\left(\frac{3}{2} - 4i\right)$$
$$= \frac{3}{2} + 6i - \frac{3}{2}i - 4$$
$$= -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$$

14.3. 14.3.1. Démontrons que $PQRS$ est un parallélogramme

Il suffit de démontrer que $\vec{PQ} = \vec{SR}$

Soit encore que $z_Q - z_P = z_R - z_S$

On a :

$$z_Q - z_P = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i - (3 + 2i) = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$$

et

$$z_R - z_S = -5 - i - \left(-\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i\right)$$
$$= -5 + \frac{5}{2} - i - \frac{9}{2}i$$
$$= -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$$

D'où $z_Q - z_P = z_R - z_S$

Par conséquent $\vec{PQ} = \vec{SR}$

Donc $PQSR$ est un parallélogramme

14.3.2. Calculons $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$

D'après la question précédente

$$z_Q - z_P = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$$
$$\Leftrightarrow z_P - z_Q = \frac{5}{2} + \frac{11}{2}i$$

Et

$$z_R - z_Q = (-5 - i) - \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i\right)$$
$$= -5 - \frac{1}{2} - i + \frac{7}{2}i$$
$$= -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}i$$

Donc

$$\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{-\frac{11}{2} + \frac{5}{2}i}{\frac{5}{2} + \frac{11}{2}i} = \frac{-11 + 5i}{5 + 11i}$$
$$= \frac{(-11 + 5i)(5 - 11i)}{(5 + 11i)(5 - 11i)}$$
$$= \frac{-55 + 121i + 25i + 55}{25 + 121}$$
$$= \frac{146i}{146} = i$$

Nature précise du parallélogramme $PQRS$

$$\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = i \Rightarrow \left|\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_G}\right| = |i| = 1$$
$$\text{et } \arg\left(\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{RQ}{PQ} = 1 \text{ et } \operatorname{mes}(\vec{QP}, \vec{QR}) = \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow RQ = PQ \text{ et } \operatorname{mes}(\vec{QP}, \vec{QR}) = \frac{\pi}{2}$$

$PQRS$ est donc un parallélogramme qui a deux cotes consécutifs de même longueur et un angle droit.

Il s'agit donc d'un carré.

$PQRS$ est un carré.

14.3.3. Justifions que P, Q, R et S appartiennent à un même cercle.

Comme $PQRS$ est un carré, les point P, Q, R et S appartiennent au cercle de diamètre $[PR]$.

Le centre $\Omega(z_\Omega)$ de ce cercle est le milieu de $[PR]$. Donc

$$z_\Omega = \frac{z_P + z_R}{2} = \frac{3 + 2i - 5 - i}{2}$$
$$= \frac{-2 + i}{2} = -1 + \frac{i}{2}$$

Le rayon r du cercle et $r = \dfrac{PR}{2}$

$$r = \frac{|z_R - z_P|}{2} = \frac{|-5 - i - 3 - 2i|}{2}$$
$$= \frac{|-8 - 3i|}{2} = \frac{\sqrt{8^2 + 3^2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{64 + 9}}{2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

Solution 15. (p. 6)

Problème :

$$f(x) = (x - 2)e^x + x$$

15.1. 15.1.1. Forme générale des solutions de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est $(c) : r^2 - 2r + 1 = 0$

$$(c) \Leftrightarrow (r - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1$$

L'équation a donc une solution double $r_0 = 1$.

Or on sait que si l'équation caractéristique admet une solution double r_0, la forme générale des solutions de l'équation différentielle est $x \mapsto (Ax + b)e^{r_0 x}$ $(A, B \in \mathbb{R})$

Pour notre cas, la forme générale des solutions de l'équation différentielle donnée est donc $x \mapsto (Ax + B)e^x$ $(A, B \in \mathbb{R})$.

15.1.2. Justifions que f est une solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = x - 2$

On a $f(x) = (x - 2)e^x + x$

$$\Rightarrow f'(x) = (x - 2)'e^x + (x - 2)(e^x)' + 1$$
$$= e^x + (x - 2)e^x + 1$$
$$= (x - 1)e^x + 1$$
$$\Rightarrow f''(x) = (x - 1)'e^x + (x - 1)(e^x)'$$
$$= e^x + (x - 1)e^x$$
$$= xe^x$$

D'où

$$
\begin{aligned}
f''(x)-2f'(x)+f(x) &= \\
&= xe^x-2\left[(x-1)e^x+1\right]+(x-2)e^x+x \\
&= xe^x+(-2x+2)e^x-2+(x-2)e^x+x \\
&= (x-2x+2+x-2)e^x+x-2 \\
&= 0+x-2=x-2
\end{aligned}
$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y''-2y'+y=x-2$

15.2. $g(x)=(x-1)e^x+1$

15.2.1. Étudions les variations de g sur $\mathbb{R}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ on a :

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= (x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'+(1)' \\
&= e^x+(x-1)e^x+0=xe^x
\end{aligned}
$$

Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$ Donc $g'(x)$ et x sont de même signe sur $\mathbb{R}$.

Pour $x\le 0$, $xe^x\le 0\Rightarrow g'(x)\le 0\Rightarrow g$ est décroissante sur $]-\infty;0]$

Pour $x\ge 0$, $g'(x)\ge 0$

$$\Rightarrow g \text{ est croissante sur } [0;+\infty[$$

15.2.2. Déduisons en que g est positive sur $\mathbb{R}$

Comme g est décroissante sur

$$]-\infty;0],\ \forall x\in]-\infty;0] \text{ on a } g(x)\ge g(0)$$

or $g(0)=(0-1)e^0+1=-1+1=0$

Donc

$$\forall x\in]-\infty;0],\ g(x)\ge 0 \qquad (1.1)$$

Comme g est croissance sur $[0;+\infty[$, $\forall x\in[0;+\infty[$,

$$0\le x\Rightarrow g(0)\le g(x)\Rightarrow 0\le g(x)$$

Donc

$$\forall x\in[0+\infty],\ g(x)\ge 0 \qquad (1.2)$$

(1.1) et (1.2) $\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)\ge 0$

Donc g est positive sur $\mathbb{R}$.

15.3. **15.3.1.** Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left[(x-2)e^x+x\right] \\
&= \lim_{x\to-\infty} xe^x-2\lim_{x\to-\infty} e^x+\lim_{x\to-\infty} x \\
&= 0-2\times 0+(-\infty)=-\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}(x-2)e^x+\lim_{x\to+\infty} x \\
&= \left[\lim_{x\to+\infty}(x-2)\right]\left[\lim_{x\to+\infty} e^x\right]+\lim_{x\to+\infty} x \\
&= (+\infty)\times(+\infty)+(+\infty)=+\infty
\end{aligned}
$$

15.3.2. Montrons que la droite $(\Delta): y=x$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$.

Il suffit de montrer que $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$

On a

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to-\infty}((x-2)e^2+x-x) \\
&= \lim_{x\to-\infty}(x-2)e^x \\
&= \lim_{x\to-\infty} xe^x-2\times\lim_{x\to-\infty} e^x \\
&= 0-2\times 0=0
\end{aligned}
$$

D'où $(\Delta): y=x$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$

- Étudions la branche infinie à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$

  Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nous allons calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)e^x+x}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}e^x+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}\times\lim_{x\to+\infty} e^x+1 \\
&= 1\times(+\infty)+1=+\infty
\end{aligned}
$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, alors $(\mathscr{C}_f)$ admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (OS).

- Étudions la position de $(\mathscr{C}_f)$ et de (Δ) par rapport à x.

  Il suffit d'étudier le signe de $f(x)-x$

  On a :

$$
\begin{aligned}
f(x)-x &= (x-2)e^x+x-x \\
&= (x-2)e^x
\end{aligned}
$$

Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$

Donc :

Pour $x<2$, $(x-2)e^x<0\Rightarrow f(x)-x<0\Rightarrow f(x)<0$

$$\Rightarrow (\mathscr{C}_f) \text{ est en dessous de } (\Delta)$$

Pour $x>2$, $(x-2)e^x>0\Rightarrow f(x)>x$

$$\Rightarrow (\mathscr{C}_f) \text{ est au dessus de } (\Delta)$$

Pour $x=2$, $(\mathscr{C}_f)$ et (Δ) se touchent

15.4. **15.4.1.** Vérifions que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=g(x)$

Dans tout réel x on a :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= ((x-2)e^x+x)' \\
&= ((x-2)e^x)'+(x)' \\
&= (x-2)'e^x+(x-2)(e^x)'+1 \\
&= 1\times e^x+(x-2)(e^x)+1 \\
&= (1+x-2)e^x+1 \\
&= (x-1)e^x+1 \\
&= g(x)
\end{aligned}
$$

D'où $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=g(x)$

Déduisons le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

D'après la question (**15.2.2.**), g est positive sur $\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow f' \text{ est positive sur } \mathbb{R} \text{ (car } f'=g) \\
&\Rightarrow f \text{ est croissance sur } \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

15.4.2. Justifications que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.

f étant un fonction définie, continue et strictement monotone (croissance) sur $\mathbb{R}$, définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$

Or

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

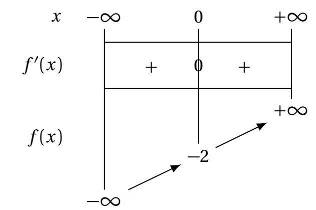
(voir question (15.3.1.))

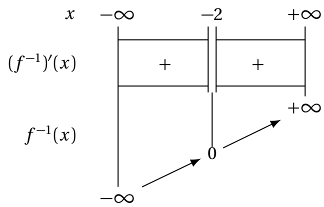
$$\Rightarrow f(\mathbb{R}) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

f établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

15.4.3. Tableaux de variation de f et de f^{-1}

On a





15.5. 15.5.1. Déterminons une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse O.

On soit que la tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse x_0 admet

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

comme équation cartésienne.

Donc

$$(T): y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$
$$\text{et } (T): y = f'(0)x + f(0)$$

Or

$$f'(0) = g(0) = (0-1)e^0 + 1 = 0$$
$$\text{et } f(0) = -2$$

D'où

$$(T): y = 0x - 2$$
$$\Leftrightarrow (T): y = -2$$

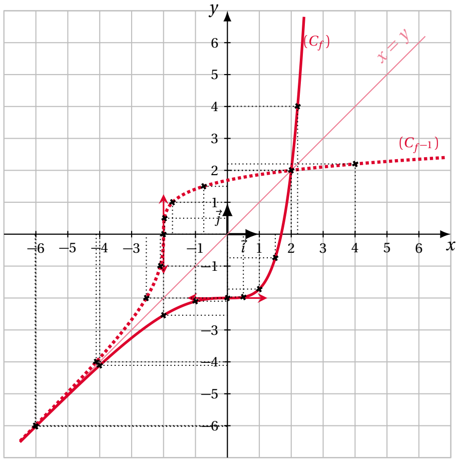
15.5.2. Construisons $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé.

Pour construire $(\mathscr{C}_f)$, nous allons utiliser le tableau de valeurs particuliers suivant :

x	-6	-4	-2	-1	0
$f(x)$	$-6{,}02$	$-4{,}11$	$-2{,}54$	$-2{,}1$	-2

x	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}2$
$f(x)$	$-1{,}97$	$-1{,}72$	$-0{,}74$	2	$4{,}005$

On a donc le tracé suivant



15.6. Calculons A en utilisant une intégration par partie

$$A = \int_0^2 |f(x) - x| \, dx$$
$$= \int_0^2 (x - f(x)) \, dx$$
$$= \int_0^2 (x - (x-2)e^x - x) \, dx$$
$$= -\int_0^2 (x-2)e^x \, dx$$

Comme (Δ) est au dessus de $(\mathscr{C}_f)$ pour $x \in [0;2]$, alors $\forall x \in [0;2]$, $|f(x) - x| = x - f(x)$

Posons $u = x - 2$ et $v' = e^x \Rightarrow (u' = 1 \text{ et } v = e^x)$

on sait que $\int uv' = [uv] - \int u'v$

D'où

$$A = -\left(\left[(x-2)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x \, dx\right)$$
$$= -\left(\left[(x-2)e^x - e^x\right]_0^2\right)$$
$$= -\left(\left[(x-3)e^x\right]_0^2\right)$$
$$= -(-e^2 + 3) = (e^2 - 3)$$

Donc $A = (e^2 - 3)$ cm²

1.2.6 Solution – Baccalauréat 2017

La solution de ce sujet peut être gratuitement téléchargée sur :

www.simo.education


J.P. Kengne
E. Simo
Mathématiques
Terminales D, TI
Nouvelle Edition