Terminales C, E

Eric Simo, Editeur

# MATHÉMATIQUES

## Baccalauréat – Sujets Corrigés

Jean-Pierre Kengne, Emmanuel Simo

Avec 11 schémas d'illustration
et 18 exercices corrigés

Eric Simo, Msc.-Ing. TU-BS (Editeur)
An den Äckern 2
31224 Peine
Allemagne
kuateric@gmail.com

Mathématiques Terminales C, E. Nouvelle Edition

Auteurs: Jean-Pierre Kengne, Maître Es Sciences; Emmanuel Simo, Maître Es Sciences (Cameroun)

Contributions: E. S. (Allemagne); F. W., J. T. (Cameroun); E. A. F. (Italie, R-U); T. v. P. (Pays-Bas); A. Z., L. S., I. D. (Ukraine); D. R., P. B. (Italie); M. B. (Zimbabwe); F. K. (Pakistan); A. K. (Russie); R. K. (Maroc)

Conception graphique des couvertures: R. A. (Bangladesh)
Thème artistique des couvertures 2017: Intelligence Artificielle

ISBN 978-3-947242-03-0 • Maison d'Edition SIMO • Bandjoun Brunswick Belfast Rotterdam • 2017



Site Internet: www.simo.education

# Avant-propos

Vous avez choisi ce livre parce que vous avez un objectif à atteindre. C'est un instrument réellement utile et efficace pour aider les apprenants des **classes de terminales scientifiques et techniques**, quel que soit leur niveau, à améliorer leurs performances en **mathématiques**.

Inspirée de la pédagogie nouvelle, la conception de ce livre se fonde sur deux outils à savoir : le *cours* et les *exercices corrigés*.

Le cours a été conçu selon le projet pédagogique suivant :

- Une présentation claire parfaitement lisible qui permet de faciliter le travail de l'apprenant.
- Un cours bien structuré allant à l'essentiel. Conforme aux contenus du programme, ce cours prépare aux compétences exigibles, mais en se limitant strictement aux notions qui doivent être étudiées. Nous l'avons donc voulu bref.

Les exercices résolus et commentés, soutenus par des *méthodes de résolution* permettent à l'apprenant d'acquérir l'esprit scientifique et les principaux modes de raisonnement qu'il devra savoir développer. C'est une bonne façon d'aborder les nombreux exercices de chaque chapitre. Dans le souci d'efficacité qui a fait le succès de cette édition, nous attirons votre attention dans les solutions proposées, sur la schématisation, la représentation graphique, le choix des notations, la conduite littérale et enfin l'application numérique.

Notons cependant qu'il ne sert à rien de lire à priori la solution d'un exercice, mais qu'il faut chercher cette solution après avoir lu l'énoncé en entier et ne consulter la solution proposée dans le livre que pour contrôler son propre résultat ou en cas d'hésitation.

Nous formons le vœu que cet ouvrage constitue un outil efficace pour les apprenants des **classes de terminales scientifiques et techniques** et qu'il apporte à nos collègues professeurs l'aide qu'ils sont en droit d'attendre. Nous attendons avec plaisir toutes les remarques et suggestions.


J.P. Kengne
E. Simo
Mathématiques
Terminales C, E
Nouvelle Edition
Mathématiques
Mathématiques
Mathématiques

# Table des matières




Mathématiques
Terminales C, E
Nouvelle Edition

1

# Sujets d’examen – Baccalauréat Mathématiques – Séries C, E



1

## 1.1 Enoncé des sujets d'examen

### 1.1.1 Enoncé – Baccalauréat 2012

| Examen: | Baccalauréat | Séries: | C, E |
|---|---|---|---|
| Session: | 2012 | Durée: | 4 heures |
| Épreuve: | Mathématiques | Coef.: | 5/4 |

#### Exercice 1.

**Série E uniquement**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0,\ \pi[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

**1.1.** Étudier la fonction $f$ et construire sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

**1.2.** Montrer que la restriction $g$ de $f$ à l'intervalle $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ possède une fonction réciproque $g^{-1}$, dont on construira la courbe dans le même repère que $(C)$

**1.3.** Soit $y=g^{-1}(x)$. Montrer que $\sin y=\dfrac{1}{x}$ et que $\cos y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

**1.4.** En déduire que pour tout $x$ de $]1,+\infty[$, $\left(g^{-1}\right)'(x)=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

**1.5.** En se servant des résultats précédents, calculer

$$I=\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$$

**Série C uniquement**

**1.1.** Soit $N$ un entier relatif impair. Montrer que $N^2\equiv 1\,[8]$

**1.2.** Montrer que si un entier relatif $M$ est tel que $M^2\equiv 1\,[8]$ alors $M$ est impair

**1.3.** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2=8y+1$

**1.4.** En déduire que la parabole $(\Gamma)$ d'équation $y=\dfrac{x^2-1}{8}$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan $(P)$ passe par une infinité de points à coordonnées entières

#### Exercice 2.

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation $(E)$ : $z^3+\left(3-d^2\right)z+2\mathrm{i}\left(1+d^2\right)=0$, où $d$ est un nombre complexe donné de module 2

**2.1. 2.1.1.** Vérifier que $2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation $(E)$

**2.1.2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$

**2.2.** Dans le plan complexe $P$, on considère les points $A$, $B$, $M$ et $N$ d'affixes respectives $2\mathrm{i}$; $-\mathrm{i}$; $-\mathrm{i}+d$ et $-\mathrm{i}-d$

**2.2.1.** Calculer $MN$ et déterminer le milieu de $[MN]$

**2.2.2.** En déduire que lorsque $d$ varie dans $\mathbb{C}$, les points $M$ et $N$ appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera

**2.2.3.** Dans le cas où $AMN$ est un triangle, montrer que $O$ est le centre de gravité du triangle $AMN$

**2.2.4.** En déduire les valeurs de $d$ pour lesquelles le triangle $AMN$ est isocèle de sommet principal $A$.

#### Exercice 3.

**Partie A**

Soit l'équation différentielle

$$(E):\ y''+(2\ln 2)\,y'+(\ln 2)^2\,y=0$$

**3.1. 3.1.1.** Résoudre l'équation $(E)$ dans $\mathbb{R}$.

**3.1.2.** Déterminer la solution de $(E)$ vérifiant :

$$g(0)=0 \quad \text{et} \quad g'(0)=1$$

**3.2.** On considère la fonction numérique $u$ définie pour tout réel $x$ par $u(x)=\dfrac{x}{2^x}$. On note $(C)$ la courbe représentative de $u$ dans un repère orthonormé du plan.

**3.2.1.** Montrer que la fonction dérivée $u'$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u'(x)=(1-x\ln 2)\,\mathrm{e}^{-x\ln 2}$$

**3.2.2.** Dresser le tableau de variation de $u$.

**3.2.3.** Préciser les branches infinies de $(C)$

**3.2.4.** Tracer $(C)$ et sa tangente $\left(T_0\right)$ au point d'abscisse 0. (prendre 2 cm comme unité sur les axes des coordonnées).

**3.3. 3.3.1.** Prouver que $u$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.

**3.3.2.** En déduire la valeur du nombre réel

$$(\ln 2)^2\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x$$

**Partie B**

On définit la suite numérique $\left(V_n\right)$ par

$$\begin{cases} V_0=0 \\ V_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(V_n+2^{-n}\right), & \text{pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

**3.3.1.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $V_n=u(n)$

**3.3.2.** Pour tout entier naturel $n$, on pose

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}V_k$$

**3.3.3.** Démontrer par récurrence que

$$S_n=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\right)-\frac{n+1}{2^n}$$

pour tout entier naturel $n$.

**3.3.4.** Calculer la limite de la suite $\left(S_n\right)$

**Partie C**

Dans le plan orienté et muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les vecteurs

$$\vec{e}_1=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$$

**3.3.1.** Démontrer que $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ est un repère orthonormé du plan.

**3.3.2.** Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation qui transforme $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ en $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

**3.3.3.** Une conique dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ a pour équation cartésienne :

$$13X^2 + 7Y^2 + 6\sqrt{3}XY = 16$$

**3.3.3.1.** Écrire l'équation cartésienne réduite de cette conique dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
**3.3.3.2.** En déduire sa nature et son excentricité.

## 1.1.2 Enoncé – Baccalauréat 2013

| | | | |
|---|---|---|---|
| Examen: | Baccalauréat | Séries: | C, E |
| Session: | 2013 | Durée: | 4 heures |
| Épreuve: | Mathématiques | Coef.: | 5/4 |

### Exercice 4.

**Uniquement pour les candidats de la série C**
$N$ désigne un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$
**4.1.** Démontrer que le reste de la division de $N$ par 100 est l'entier $r$ dont l'écriture en base 10 est $r = \overline{a_1 a_0}$
**4.2.** Application : démontrer que le chiffre des unités et le chiffre des dizaines du nombre $N = 7^{7^{7^7}}$ sont respectivement 3 et 4
**Uniquement pour les candidats de la série E**
Soit $f$ une fonction numérique continue sur $[0;1]$ et telle que pour tout réel $x$ de $[0;1]$ :

$$\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1-x^2}{2}.$$

Soit $F$ une primitive de $f$ sur $[0;1]$
**4.1. 4.1.1.** En intégrant par parties l'intégrale

$$I = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

montrer que :

$$F(1) = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$$

**4.1.2.** En déduire que

$$\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{3}$$

**4.2. 4.2.1.** Développer et réduire $\left(f(x) - x\right)^2$
**4.2.2.** Déduire que

$$\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{3}.$$

### Exercice 5.

$\lambda$ désigne un nombre réel strictement positif. On donne dans l'espace un triangle $ABC$ rectangle en $A$ tel que $AB = 2\lambda$ et $AC = \lambda$
**5.1.** Construire le barycentre $G$ des points $A$, $B$ et $C$ affectés respectivement des coefficients $3; -1$ et $2$
**5.2.** Déterminer l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ de l'espace vérifiant :

$$3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 5\lambda^2$$

**5.3.** On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On donne $B(0,4,0)$ et $C(0,0,2)$
**5.3.1.** Déterminer les coordonnées de $G$
**5.3.2.** Écrire des équations cartésiennes du plan $(ABC)$ et de $(\Gamma)$
**5.3.3.** Préciser l'intersection de $(ABC)$ et $(\Gamma)$

### Exercice 6.

$\alpha$ désigne un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Le plan complexe orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
**6.1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 \cos^2\alpha - z\sin 2\alpha + 1 = 0$$

On note $z_1$ et $z_2$ les solutions de cette équation; $z_1$ désigne la solution dont la partie imaginaire est positive. $A$ et $B$ désignent les points d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.
**6.2.** Quelle est la nature du triangle $OAB$ ? Justifier votre réponse.
**6.3. 6.3.1.** Calculer une mesure en radians de l'angle $(\vec{OB}, \vec{OA})$.
**6.3.2.** En déduire une mesure en radians de l'angle $(\vec{BA}, \vec{BO})$
**6.4.** Résoudre l'équation différentielle

$$\left(\cos^2\alpha\right) f'' - (\sin 2\alpha) f' + f = 0$$

sachant que $f$ est une fonction numérique d'une variable réelle $x$ vérifiant

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = -\tan\alpha$$

### Exercice 7.

Dans tout le problème on note.

- $f$ la fonction définie dans l'intervalle $]-2, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x+2)$
- $g$ la fonction définie dans l'intervalle $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln x$

$(C_f)$ et $(C_g)$ les courbes respectives de $f$ et $g$ dans un repère orthonormé, l'unité de longueur sur les axes étant égale à 2 cm. On appelle :

- $(D)$ la droite d'équation $y = x$ dans le repère précédent;
- $(u_n)$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n$ de $N$, $u_{n+1} = f(u_n)$;
- $(v_n)$ la suite numérique définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n$ de $N$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

**7.1. 7.1.1.** Dresser les tableaux de variation de $f$ et $g$
**7.1.2.** Démontrer que $(C_f)$ et $(D)$ se coupe en deux points $M_1$ et $M_2$ dont les abscisses $x_1$ et $x_2$ vérifient :

$$-2 < x_1 < -1 \text{ et } 1 < x_2 < 2$$

**7.1.3.** Étudier suivant les valeurs de $x$ les positions relatives de $(C_f)$ et $(D)$

1

**7.1.4.** Tracer $(C_f)$, $(C_g)$ et $(D)$ après avoir étudié les branches infinies de $(C_f)$ et $(C_g)$

**7.2.** Démontrer que $(C_f)$ est l'image de $(C_g)$ par la translation de vecteur $(-2\vec{\imath})$

**7.3.** On note $(\Gamma)$ la partie du plan définie par les droites d'équation $x=-1$; $x=1$; $(C_f)$ et $(D)$. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'aire de $(\Gamma)$.

**7.4.** On note $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que : $x_1<\alpha<x_2<\beta$. Démontrer que $x_1<f(\alpha)<x_2<f(\beta)$

**7.5.** **7.5.1.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

**7.5.2.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est décroissante.

**7.5.3.** Démontrer que pour tout $n$ de $N$; $1\leq u_n<x_2<v_n\leq 2$

**7.6.** On note $I$ l'intervalle $[1,2]$

**7.6.1.** Démontrer que, pour tout $x$ de $I$, $\frac{1}{4}\leq f'(x)\leq\frac{1}{3}$

**7.6.2.** En déduire que pour tout entier naturel

$$n,\ 0<f(v_n)-f(u_n)\leq\frac{1}{3}(v_n-u_n)$$

**7.7.** **7.7.1.** Démontrer que pour tout entier naturel $n,\ 0<v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

**7.7.2.** En déduire que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes et ont la même limite.

## 1.1.3 Enoncé – Baccalauréat 2014

| | | | |
|---|---|---|---|
| Examen: | Baccalauréat | Séries: | C, E |
| Session: | 2014 | Durée: | 4 heures |
| Épreuve: | Mathématiques | Coef.: | 5/4 |

### Exercice 8.

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$; on considère les points $A(1,-1,0)$; $B(3,0,1)$; $C(1,2,-1)$ et $D(1,0,0)$

**8.1.** Démontrer que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ ne sont pas coplanaires

**8.1.1.** Écrire une équation cartésienne du plan $(ABC)$

**8.1.2.** Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$

**8.1.3.** Déterminer l'expression analytique de la réflexion $f$ par rapport au plan $(ABC)$

**8.2.** Soit $(S)$ la sphère de centre $D$ passant par $B$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'image $(S')$ de $(S)$ par $f$.

### Exercice 9.

**9.1.** On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E): y''-4y'+4y=2\cos x+\sin x;$$
$$(E_0): y''-4y'+4y=0$$

**9.1.1.** Déterminer les réels $a$ et $b$ pour lesquels la fonction $g$ définie pour tout réel $x$ par

$$g(x)=a\cos x+b\sin x$$

est une solution de $(E)$

**9.1.2.** Soit $f$ une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ est une solution de $(E)$ si et seulement si $f-g$ est solution de $(E_0)$

**9.1.3.** Résoudre $(E_0)$ et en déduire la forme générale des solutions de $(E)$

**9.2.** Soit la fonction $h$ définie sur $[0,\pi[$ par

$$h(x)=\frac{2}{5}\cos x-\frac{1}{5}\sin x.$$

On désigne par $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

**9.2.1.** Calculer pour tout $x$ de $[0,\pi[$, $h'(x)$ et $h''(x)$

**9.2.2.** Étudier les variations de $h'$ sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ et en déduire que l'équation $h'(x)=0$ dans $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ admet une unique solution $\alpha$ avec $2{,}6<\alpha<2{,}7$

**9.2.3.** Montrer que $h'(x)>0\Leftrightarrow x\in\,]\alpha,\pi[$ et dresser le tableau de variation de $h$

**9.2.4.** Tracer $(C)$. (Prendre $\alpha=2{,}6$ et pour unité de longueur sur les axes : 1,5 cm)

### Exercice 10.

**10.1.** Soit $a$ un réel strictement positif

**10.1.1.** Montrer que :

$$1-a<\frac{1}{1+a}<1$$

**10.1.2.** En déduire que :

$$a-\frac{a^2}{2}<\ln(1+a)<a$$

**10.2.** Soit $n$ un entier naturel non nul, on pose

$$P_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

**10.2.1.** Justifier que

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**10.2.2.** Montrer que :

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}<\ln P_n<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

**10.2.3.** En déduire que la suite $(P_n)$ converge et déterminer sa limite.

### Exercice 11.

Dans le plan $(P)$ rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$, on considère l'application $\Psi$ définie par $\Psi(O)=O$ et pour tout point $M$ de $(P)$ distinct de $O$, $\Psi(M)=M'$ tel que

$$\vec{OM'}=\frac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM}$$

**Partie A**

**11.1. 11.1.1.** Montrer que pour tout point $M$ de $(P)$,

$$\Psi o \Psi(M) = M$$

**11.1.2.** Justifier que l'ensemble des points $M$ de $(P)$ distinct de $O$ tels que

$$\Psi(M) = M$$

est un cercle de centre $O$ et de rayon 2

Pour toute la suite, $(d)$ est une droite quelconque de $(P)$, $D$ est un point fixé de $(d)$ distinct de $O$ ; $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(d)$. On pose $\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et on suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On donne $\vec{OD} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$.

**11.2.** Justifier que $(d)$ est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $z = a + \mathrm{i}t$, où $t \in \mathbb{R}$.

**11.3.** Soient $M$ et $M'$ 2 points de $(P)$ tous distincts de $O$ et d'affixes respectives $z$ et $z'$

**11.3.1.** Montrer que $\Psi(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{4}{\bar{z}}$

**11.3.2.** En posant $\vec{OM} = a\vec{e}_1 + t\vec{e}_2$ et $\vec{OM'} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_1$, montrer que

$$\Psi(M) = M' \Leftrightarrow x' = \frac{4a}{a^2 + t^2}$$

$$\text{et } y' = \frac{4t}{a^2 + t^2}$$

**11.3.3.** Vérifier que dans ce cas,

$$\left(x' - \frac{2}{a}\right)^2 + y'^2 = \frac{4}{a^2}$$

**11.3.4.** En déduire que si $M$ appartient à $(d)$, alors $\Psi(M)$ appartient au cercle $(C_1)$ de diamètre $[OH']$, où $H'$ est l'image par $\Psi$ du projeté orthogonal $H$ de $O$ sur $(d)$

**11.4.** Soit $h$ l'application affine qui à tout point $M(x, y)$ associe $M_1(x_1, y_1)$ tel que

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

Montrer que l'image de $(C_1)$ par $h$ est une ellipse dont on donnera l'excentricité.

**Partie B**

Dans le plan vectoriel $(\vec{P})$ associé à $(P)$, on considère l'application $\varphi$ telle que

$$\varphi(\vec{O}) = \vec{O} \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{u}) = \frac{4}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \text{ si } \vec{u} \neq \vec{O}$$

**11.1.** Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul, exprimer

$$\varphi\left(\frac{4}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right)$$

en fonction de $\vec{v}$ et en déduire que $\varphi$ n'est pas une application linéaire

**11.2. 11.2.1.** Déterminer l'ensemble $\mathrm{Inv}(\varphi)$ des vecteurs $\vec{u}$ de $(\vec{P})$ tels que $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$

**11.2.2.** Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs de $(\vec{P})$ tels que

$$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 2 \text{ et } \operatorname{mes}\left(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Calculer $\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\|$ et en déduire que $\mathrm{Inv}(\varphi)$ n'est pas un sous espace vectoriel de $(\vec{P})$

**11.2.1.** Soit $\mathrm{Opp}(\varphi)$ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $(\vec{P})$ tels que $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}$. Déterminer $\mathrm{Opp}(\varphi)$ et montrer que $\mathrm{Opp}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $(\vec{P})$

## 1.1.4 Enoncé – Baccalauréat 2015

| | | | |
|---|---|---|---|
| Examen: | Baccalauréat | Séries: | C, E |
| Session: | 2015 | Durée: | 4 heures |
| Épreuve: | Mathématiques | Coef.: | 5/4 |

### Exercice 12.

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2y+3} \\ y = \sqrt{2z+3} \\ z = \sqrt{2x+3} \end{cases}$$

où $x$, $y$ et $z$ sont des nombres réels.

**12.1.** Première approche : série E uniquement

**12.1.1.** Montrer que le triplet $(3, 3, 3)$ est une solution de ce système.

**12.1.2.** Montrer que si le triplet $(x, y, z)$ est une solution de ce système, on ne peut pas avoir $x < 3$.

**12.1.3.** Montrer que si le triplet $(x, y, z)$ est une solution de ce système, on ne peut pas avoir $x > 3$.

**12.1.4.** Déduire alors l'ensemble solution de ce système.

**12.2.** Deuxième approche : série C uniquement

**12.2.1.** Montrer que si le triplet $(x, y, z)$ est solution de ce système, alors $x$, $y$ et $z$ sont solutions de l'équation :

$$t^8 - 12t^6 + 30t^4 + 36t^2 - 128t - 183 = 0$$

**12.2.2.** En déduire les valeurs rationnelles de $x$, $y$ et $z$.

### Exercice 13.

- On dit que deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.
- Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes telles que $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ est décroissante, alors pour tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}$, on a :

$$u_n \leq v_n.$$

**13.1.** Compléter les phrases ci-après par le mot qui convient :

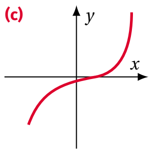
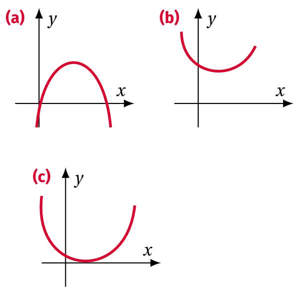
**13.1.1.** Toute suite croissante et majorée est ..........

**13.1.2.** Toute suite décroissante et .................... est convergente.

**13.2.** Indiquer si la proposition ci-après est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite »

**13.3.** Relier en justifiant votre choix la courbe (C) de la colonne (I) à la courbe $(C')$ de sa fonction dérivée dans la colonne (II).

| Colonne (I) | Colonne (II) |
|---|---|
|   |   |

## Exercice 14.

On désigne par $L\left(\mathbb{R}^2\right)$, la famille des endomorphismes $f_\lambda$ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice $M_\lambda$ relativement à la base canonique $(\vec{i},\vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} -1+\lambda & 1+\lambda \\ \lambda(1-\lambda) & \lambda \end{bmatrix},$$

où $\lambda$ est un réel.

**14.1.** A quelles conditions sur $\lambda, f_\lambda$ est-il automorphisme ?

**14.2.** Une boîte $\Omega$ contient cinq boules numérotées $-2$, $-1$, 0, 1 et 2, toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de $\Omega$ et on note $(p,q)$ le couple de numéros obtenus.
On désigne par $X$ l'aléa numérique qui à tout couple $(p,q)$ associe la valeur :

- $-2$ si aucun des $f_p$ et $f_q$ n'est un automorphisme.
- 1 si un seul parmi $f_p$ et $f_q$ est un automorphisme.
- 3 si les deux $f_p$ et $f_q$ sont des automorphismes

**14.2.1.** Déterminer la loi de probabilité de $X$

**14.2.2.** Calculer l'espérance et l'écart-type de $X$.

**14.3.** Déterminer une équation cartésienne du noyau et de l'image de $f(-2)$.

**14.4.** Soit $g$ l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ Dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$g\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\left(-x+3y;\frac{1}{2}x+y\right).$$

$G$ appartient-elle à $L(\mathbb{R})$ ? Justifier.

## Exercice 15.

Ce problème comporte trois parties indépendantes A, B et C.

**Partie A**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère l'équation (E) :

$$z^3+64\mathrm{i}=0.$$

**15.1.** Déterminer une solution $z_0$ de (E) telle que :

$$\overline{z_0}=-z_0$$

**15.2.** Déterminer les deux autres solutions $z_1$ et $z_2$ de (E), où $z_1$ a une partie réelle négative.

**15.3.** Les points $A$, $B$ et $C$ ont pour affixes respectives : $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$, $2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$ et $4\mathrm{i}$.
Déterminer la nature du triangle $ABC$ et montrer que les points $A$, $B$ et $C$ appartiennent à une conique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.

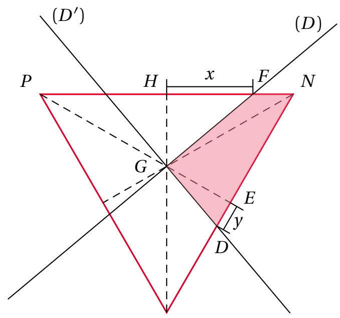
**15.4.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $f$ du plan qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que :

$$\left(z'-4\mathrm{i}\right)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-4\mathrm{i})$$

et qui transforme le point $A$ en $B$ ; $r$ et $\theta$ étant des nombres réels.

**Partie B**

Un triangle équilatéral $MNP$ de côté 2 est divisé en quatre parties par deux droites perpendiculaires passant par son centre de gravité $G$. (Voir figure ci-dessous).




On se propose de déterminer la valeur maximale de l'aire $A$ de la partie hachurée.

**15.1.** Démontrer que $A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-y)$.

**15.2.** Démontrer que $y=\dfrac{3x-1}{3(x+1)}$.

**15.3.** En déduire la valeur maximale de $A$.

**15.4.** L'espace est associé à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne : $M(0,2,0)$ ; $N(\sqrt{3},1,0)$ ; $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

Déterminer le système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire au triangle $MNP$ en son centre de gravité.

**Partie C**

$f$ est la fonction numérique d'une variable réelle $x$ définie par : $f(x)=\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}$

On pose $g(x)=\ln f(x)$.

Montrer que $g$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on précisera.

### 1.1.5 Enoncé – Baccalauréat 2016

| | | | |
|---|---|---|---|
| Examen: | Baccalauréat | Séries: | C, E |
| Session: | 2016 | Durée: | 4 heures |
| Épreuve: | Mathématiques | Coef.: | 5/4 |

## Exercice 16.

Une urne contient 5 jetons portant les réels :

$$-\sqrt{2}\,;-1\,;0\,;1 \text{ et } \sqrt{2}.$$

On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. On appelle $x$ le numéro du premier jeton et $y$ celui du deuxième jeton et on construit le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.

**16.1.** Combien de nombres complexes peut-on ainsi construire?

**16.2.** Quelle est la probabilité d'obtenir :

**16.2.1.** Un nombre complexe de module $\sqrt{2}$?

**16.2.2.** Un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2}$ ?

**16.3.** On effectue trois fois de suite le tirage successif et avec remise de 2 jetons de l'urne et on désigne par $X$ la variable aléatoire qui, à l'issue de ces trois tirages associe le nombre de nombres complexes de module $\sqrt{2}$. Déterminer la loi de probabilité de $X$.

## Exercice 17.

On considère dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, les surfaces $(S)$ et $(S')$ d'équations respectives $z = (x-y)^2$ et $z = xy$. On prendra 1 cm comme unité.

**17.1. 17.1.1.** Déterminer le vecteur $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} \wedge (2\vec{k})$.

**17.1.2.** On note $(I_2)$ l'intersection de $(S')$ avec le plan $(P_1)$ d'équation $z = 0$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(I_2)$.

**17.1.3.** On note $(I_3)$ l'intersection de $(S)$ et de la surface $(S'')$ d'équation $z = -2xy + 4 + 2y^2$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques du projeté orthogonal de $(I_3)$ sur le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**17.2.** (Série C uniquement)

On note $(I_4)$ l'intersection de $(S)$ et de $(S')$. Dans cette partie, on veut démontrer que le seul point appartenant à $(I_4)$ dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point $O(0,0,0)$. On suppose qu'il existe un point $M$ appartenant à $(I_4)$ et dont les coordonnées $x$, $y$ et $z$ sont des entiers naturels.

**17.2.1.** Montrer que si $x = 0$, alors le point $M$ est le point $O$.

**17.2.2.** On suppose désormais que l'entier $x$ n'est pas nul.

**17.2.2.1.** Montrer que les entiers $x$ et $y$ vérifient

$$x^2 - 3xy + y^2 = 0.$$

En déduire qu'il existe alors des entiers naturels $x'$ et $y'$ premiers entre eux tels que

$$x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0.$$

**17.2.2.2.** Montrer que $x'$ divise $y'^2$, puis que $x'$ divise $y'$.

**17.2.2.3.** Établir que $x = 0$ et conclure.

**17.3.** (Série E uniquement)

$ABCO$ est un tétraèdre régulier d'arête égale à 2. L'arête $[OB]$ est portée par l'axe des ordonnées. $C$ est un point du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'abscisse égale à $\sqrt{3}$.

**17.3.1. 17.3.1.1.** Faire un schéma.

**17.3.1.2.** Montrer que les coordonnées des points $A$, $B$ et $C$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont respectivement $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; $(0,2,0)$ et $(\sqrt{3}, 1; 0)$.

**17.3.2.** En déduire le volume du tétraèdre $ABCO$.

## Exercice 18.

Ce problème comporte deux parties 1 et 2.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère l'ensemble $(E)$ des points $M(x, y)$ tels que $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$. On va déterminer toutes les isométries du plan qui laissent $(E)$ globalement invariant.

**Partie 1**

Soit $f$ la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \left(1 - \sqrt{|x|}\right)^2$$

pour tout $x$ appartenant à $[-1, 1]$. On note $(C)$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra 3 cm comme unité sur les axes.

**18.1. 18.1.1.** Déterminer la parité de $f$

**18.1.2.** Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire?

**18.2.** Soit $g$ la restriction de $f$ à $[0,1]$ et $t$ définie sur $[0,1]$ par $t(x) = g(x^2)$.

**18.2.1.** Vérifier que $g(x) = (1-\sqrt{x})^2$ pour tout $x \in [0,1]$.

**18.2.2.** Étudier la dérivabilité de $g$ à droite en 0. Que peut-on en conclure pour la courbe $(C)$ de $f$.

**18.2.3.** Montrer que pour tout $x \in ]0,1]$, $g'(x) = \frac{-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

**18.2.4.** Dresser le tableau de variation de $g$.

**18.2.5.** Montrer que $t$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2 = 0$ sur $[0,1]$.

**18.3. 18.3.1.** Représenter soigneusement dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe $(C)$ de la fonction $f$.

**18.3.2.** Déterminer l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses et la courbe $(C)$ de $f$.

**18.4.** Soit $h$ la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = -h(x)$. Déduire de $(C)$ la courbe $(C)$ de $h$ dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**18.5.** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

**18.5.1.** Vérifier que la suite $(u_n)$ est bien définie.

**18.5.2.** Montrer que $(u_n)$ n'est ni croissante ni décroissante.

**Partie 2**

On note $(\mathscr{I})$ l'ensemble des isométries du plan qui laissent $(E)$ globalement invariant.

**18.1.** Montrer que pour tout point $M(x, y)$ appartenant à $(E)$, on a : $-1 \leq x \leq 1$.

**18.2.** Montrer que $(E)$ est la réunion des courbes $(C)$ et $(C')$.

**18.3.** On considère dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les points $I(1;0)$; $J(0;1)$; $K(-1;0)$ et $L(0;-1)$.

**18.3.1.** Déterminer l'ensemble des couples $(A, B)$ de points de $(E)$ tels que $d(A, B) = 2$.

**18.3.2.** Soit $S$ une isométrie du plan laissant $(E)$ globalement invariant.

Montrer que : $S(O) = O$.

**18.3.3.** En déduire toutes les natures possibles de l'isométrie $S$.
**18.4.** Soit $r$ un déplacement laissant globalement invariant $(E)$.
**18.4.1.** Vérifier que $r$ est soit une rotation de centre $O$ et d'angle non nul, soit l'application identique du plan.
**18.4.2.** En déduire par leurs éléments caractéristiques tous les déplacements qui laissent $(E)$ globalement invariant.
**18.5.** Soit $S_\Delta$ une réflexion du plan d'axe $\Delta$ laissant $(E)$ globalement invariant.
**18.5.1.** Vérifier que $O \in \Delta$.
**18.5.2.** En déduire par leurs éléments caractéristiques toutes les réflexions qui laissent $(E)$ globalement invariant.
**18.6.** Écrire alors en extension l'ensemble $(\mathscr{I})$.

### 1.1.6 Enoncé – Baccalauréat 2017

| | | | |
|---|---|---|---|
| Examen: | Baccalauréat | Séries: | C, E |
| Session: | 2017 | Durée: | 4 heures |
| Épreuve: | Mathématiques | Coef.: | 5/4 |

L'énoncé de ce sujet peut être gratuitement téléchargé sur :




## 1.2 Solution des sujets d'examen

### 1.2.1 Solution – Baccalauréat 2012

**Solution 1. (p. 2)**

**Série E uniquement**

$f : ]0,\pi[ / f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

**1.1.** $f$ est définit sur $D_f = ]0,\pi[$.
$f$ est continue et dérivable sur $D_f$.

■ Variations de $f$.
$\forall x \in D_f$

$$f'(x) = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$\forall x \in ]0,\pi[$

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\cos x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On a le tableau de signe suivant.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi $f$ est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

■ Limites aux bornes de $D_f$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

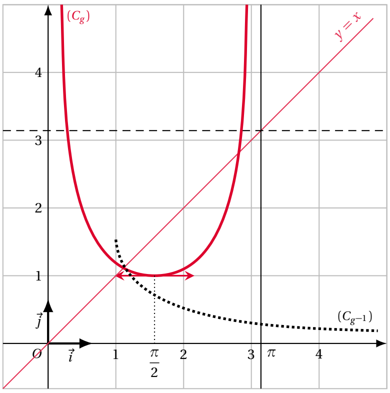
et

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

■ Tableau de variation

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

■ Tracer de la courbe de $f$.




**1.2.** La restriction de $f$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ étant continue et strictement décroissante, définit une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $g\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [1, +\infty[$.

La courbe de $g^{-1}$ est le symétrique de la courbe de $g$ par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

**1.3.** Soit $y = g^{-1}(x)$; montrons que $\sin y = \frac{1}{x}$ et $\cos y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

On a $y = g^{-1}(x)$

$$\Leftrightarrow x = g(y) = \frac{1}{\sin y}$$

$$\Leftrightarrow \sin y = \frac{1}{x}$$

Aussi $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$

$$\Leftrightarrow \cos^2 y + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 y = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos y = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \text{ ou } \cos y = -\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Or $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos y > 0$

D'où

$$\cos y = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

Donc $\sin y = \frac{1}{x}$ et $\cos y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

**1.4.** Déduisons que $\forall x \in ]1, +\infty[$

$$\left(g^{-1}\right)'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

On a $\forall x \in ]1, +\infty[$

$$\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g' \circ g^{-1}(x)}$$

$$= \frac{1}{-\frac{\cos g^{-1}(x)}{\sin^2 g^{-1}(x)}}$$

$$= -\frac{\sin^2 g^{-1}(x)}{\cos g^{-1}(x)}$$

$$= -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

**1.5.** Calculons $I$.

$$I = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$$

$$= -\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \left(g^{-1}\right)'(t)\mathrm{d}t$$

$$= -\left[g^{-1}(t)\right]_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}}$$

$$= g^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) - g^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$$

■ Cherchons $g^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$$x = g^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Donc $g^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

De même $g^{-1}\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

D'où $I = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

**Série C uniquement**

**1.1.** Soit $N$ un entier relatif impair. Montrons que $N^2 \equiv 1[8]$.

$N$ est impair $\Leftrightarrow N = 2k+1, (k \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow N^2 = (2k+1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 4k(k+1) + 1$$

$$\Rightarrow N^2 - 1 = 4k(k+1)$$

Or $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\left(k(k+1)\right) \equiv 0[2]$

Donc $\exists k' \in \mathbb{Z} / k(k+1) = 2k'$.

D'où $N^2 - 1 = 4 \times 2k' = 8k'$.

Donc $N^2 - 1 \equiv 0[8] \Rightarrow N^2 \equiv 0[8]$.

**1.2.** Montrons que si $M^2 \equiv 1[8]$ alors $M$ est impaire.

Nous allons procéder par absurde.

Soit $M / M^2 \equiv 1[8]$

supposons que $M$ n'est pas impair c'est-à-dire $M$ est pair.

Alors $\exists k \in \mathbb{Z} / M = 2k \iff M^2 = 4k^2$.
Comme $M \equiv 1[8]$ alors $\exists q \in \mathbb{Z} / M^2 = 8q + 1$

$$\begin{aligned} &\iff 4k^2 = 8q + 1 \\ &\iff 4\left(k^2 - 2q\right) = 1 \\ &\iff 4|1 \quad \text{(impossible)} \end{aligned}$$

Car 4 n'est pas un diviseur de 1.
D'où si $M \equiv 1[8]$ alors $M$ est impaire.

**1.3.** Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2 = 8y + 1$.
D'après les deux questions précédentes $x^2 = 8y + 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 2k + 1$.
D'où

$$\begin{aligned} &(2k+1)^2 = 8y + 1 \\ &\iff 4k^2 + 4k = 8y \\ &\iff k^2 + k = 2y \\ &\iff 2y = k(k+1) \end{aligned}$$

- Si $k$ est paire, alors $\exists q \in \mathbb{Z} / k = 2q$ donc $y = q(2q+1)$ et $x = 4q + 1$.
- Si $k$ est impaire $\exists q \in \mathbb{Z} / k = 2q + 1$ donc $2y = (2q+1)(2q+2) = 2(2q+1)(q+1)$

$\iff y = (2q+1)(q+1)$ et $x = 2(2q+1) + 1 = 4q + 3$
Ainsi

$$S = \left\{\left(4q+1, q(2q+1)\right), \left(4q+3, (2q+1)(q+1)\right); q \in \mathbb{Z}\right\}$$

**1.4.** Déduisons que la parabole $(\Gamma)$ d'équation $y = \dfrac{x^2 - 1}{8}$ passe par une infinité de points à coordonnées entières.

$$\begin{aligned} &y = \frac{x^2 - 1}{8} \\ &\iff 8y = x^2 - 1 \\ &\iff x^2 = 8y + 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Or d'après la question précédente les couples $\left(4q+1, q\left(2q+1\right)\right)$ et $\left(4q+3, \left(2q+1\right)\left(q+1\right)\right)$ $(q \in \mathbb{Z})$ sont les solutions entières de (1.1).
Donc l'équation (1.1) admet une infinité de solutions entières et par conséquent la parabole $(\Gamma)$ d'équation $y = \dfrac{x^2 - 1}{8}$ passe par une infinité de points à coordonnées entières.

## Solution 2. (p. 2)

Soit l'équation (E) définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ par

$$z^3 + \left(3 - d^2\right)z + 2\mathrm{i}\left(1 + d^2\right) = 0 \tag{E}$$

avec $d \in \mathbb{C}$ et $|d| = 2$.

**2.1. 2.1.1.** Vérifions que $2\mathrm{i}$ est solution de (E).
On a
$(2\mathrm{i})^3 + \left(3 - d^2\right)2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}\left(1 + d^2\right) = -8\mathrm{i} + 6\mathrm{i} - 2d^2\mathrm{i} + 2\mathrm{i} + 2d^2\mathrm{i} = 0$.
D'où $2\mathrm{i}$ est solution de (E).

**2.1.2.** Résolvons (E) dans $\mathbb{C}$.
Puisque $2\mathrm{i}$ est une solution de (E) alors il existe deux nombres complexes $a$ et $b$ tels que $z^3 + \left(3 - d^2\right)z + 2\mathrm{i}\left(1 + d^2\right) = (z - 2\mathrm{i})\left(z^2 + az + b\right)$

Cherchons de tels $a$ et $b$ :

$$\begin{aligned} &(z - 2\mathrm{i})\left(z^2 + az + b\right) = z^3 + \\ &\left(3 - d^2\right)z + 2\mathrm{i}\left(1 + d^2\right) \\ \iff &z^3 + (a - 2\mathrm{i})z^2 + (b - 2\mathrm{i}a)z - 2\mathrm{i}b = z^3 + \\ &\left(3 - d^2\right)z + 2\mathrm{i}\left(1 + d^2\right) \end{aligned}$$

Par identification on

$$\begin{cases} a - 2\mathrm{i} = 0 \\ b - 2\mathrm{i} = 3 - d^2 \\ -2\mathrm{i}b = 2\mathrm{i}\left(1 + d^2\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2\mathrm{i} \\ b = 3 - d^2 + 2\mathrm{i}a = -\left(d^2 + 1\right) \end{cases}$$

D'ou $z^3 + \left(3 - d^2\right)z + 2\mathrm{i}\left(1 + d^2\right) = (z - 2\mathrm{i})\left(z^2 + 2\mathrm{i}z - \left(d^2 + 1\right)\right)$
Ainsi (E) $\iff z - 2\mathrm{i} = 0 \iff z^2 + 2\mathrm{i}z - \left(d^2 + 1\right) = 0$.
Résolvons d'abord $z^2 + 2\mathrm{i}z - \left(d^2 + 1\right) = 0$

$$\Delta = (2\mathrm{i})^2 + 4\left(d^2 + 1\right) = -4 + 4d^2 + 4 = 4d^2 = (2d)^2$$

D'où $z = \dfrac{-2\mathrm{i} - 2d}{2} = -\mathrm{i} - d$ ou $z = -\mathrm{i} + d$.
Ainsi l'ensemble solution de (E) dans $\mathbb{C}$ est donc

$$S = \{2\mathrm{i}, -\mathrm{i} - d, -\mathrm{i} + d\}$$

**2.2.** Dans le plan complexe on considère les points $A(2\mathrm{i})$, $B(-\mathrm{i})$, $M(-\mathrm{i} + d)$ et $N(-\mathrm{i} - d)$.

**2.2.1.** Calculons $MN$ et déterminons le milieu de $[MN]$.
On a $MN = \left|z_N - z_M\right| = |-\mathrm{i} - d - \mathrm{i} + d| = |-2d| = 2|d| = 4$ car $|d| = 2$.
Le milieu de $[MN]$ est $I$ d'affixe
$z_I = \dfrac{z_N + z_M}{2} = \dfrac{-\mathrm{i} - d - \mathrm{i} + d}{2} = -\dfrac{2\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{i} = z_B$.
Ainsi le milieu de $[MN]$ est le point $B$.

**2.2.2.** Déduisons que lorsque $d$ varie sur $\mathbb{C}$, les points $M$ et $N$ appartiennent à un cercle fixe.
On a d'après la question **2.2.1.** $MN = 4$ et $B$ milieu de $[MN]$.
Donc $BM = BN = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$
D'où $M$ et $N$ appartiennent au cercle de centre $B$ et de rayon 2.

**2.2.3.** Dans le cas où $AMN$ est un triangle, montrons que $O$ est le centre de gravité de $AMN$.
Il suffit de montrer que $z_O = \dfrac{z_A + z_M + z_N}{2}$.
On a $\dfrac{z_A + z_M + z_N}{2} = \dfrac{2\mathrm{i} - \mathrm{i} + d - \mathrm{i} - d}{2} = 0 = z_O$.
D'où $O$ est le centre de gravité du triangle $AMN$.

**2.2.4.** Déduisons les valeurs de $d$ pour lesquelles $AMN$ est isocèle en $A$.
$AMN$ est isocèle en $A$ si et seulement si $(AB) \perp (MN)$ car $B$ est le milieu de $[MN]$.
Or $(AB) = (AO)$ donc il faut et suffit que $(AO) \perp (MN)$.
On a $(AO) \perp (MN)$

$$\begin{aligned} &\iff \frac{z_N - z_M}{z_A - z_O} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \\ &\iff \frac{-\mathrm{i} - d + \mathrm{i} - d}{2\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow di \in i\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow d \in \mathbb{R}$$

Or $|d| = 2 \Leftrightarrow d = 2$ ou $d = -2$.

## Solution 3. (p. 2)

### Partie A

Soit l'équation

$$y'' + (2\ln 2)\, y' + (\ln 2)^2\, y = 0 \qquad \text{(E)}$$

**3.1. 3.1.1.** Résolvons l'équation (E) dans $\mathbb{R}$.
L'équation caractéristique associé à (E) est :

$$r^2 + (2\ln 2)\, r + (\ln 2)^2 = 0 \qquad (1.1)$$

$\Delta = 4\ln^2 2 - 4\ln^2 2 = 0$
Donc (1.1) admet une solution double $r_0 = -\dfrac{2\ln 2}{2} = -\ln 2$.
Ainsi les solutions de (1.1) sont sous la forme $y = (Ax + Bx)e^{r_0 x} = (A + B)e^{-x\ln 2}$, $(A, B \in \mathbb{R})$.
L'ensemble solution de (1.1) est donc

$$S\left\{x \mapsto (Ax + B)2^{-x} : A, B \in \mathbb{R}\right\}$$

**3.1.2.** Déterminons la solution $g$ de (E) vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.
On a

$$g(x) = (Ax + B)2^{-x} = (Ax + B)e^{-x\ln 2}$$

et

$$g'(x) = \left[A - \ln 2(Ax + B)\right]e^{-x\ln 2}$$

$g(0) = 0 \Leftrightarrow Be^{-0} \Leftrightarrow B = 0$
et

$$g'(0) = 1$$
$$\Leftrightarrow [A - B\ln 2]e^{-0} = 1$$
$$\Leftrightarrow A - B\ln 2 = 1$$
$$\Leftrightarrow A = 1$$

D'où $g(x) = xe^{-x\ln 2} = x2^{-x} = \dfrac{x}{2^x}$.

**3.2.** Soit la fonction $u(x) = \dfrac{x}{2^x}$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**3.2.1.** Montrons que la fonction

$$u'(x) = (1 - x\ln 2)e^{-x\ln 2}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = \frac{x}{2^x} = x \cdot 2^{-x} = xe^{-x\ln 2}$$

Donc

$$u'(x) = e^{-x\ln 2} - (\ln 2)\, xe^{-x\ln 2}$$
$$= (1 - x\ln 2)e^{-x\ln 2}$$

**3.2.2.** Tableau de variation de $u$.

- Signe de $u'$.
  On a $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $e^{-x\ln 2} > 0$.
  Donc $u'(x)$ est de même signe que $1 - x\ln 2$.
  D'où

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{\ln 2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

- Limites aux bornes du domaine de définition de $u$.
  $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2^x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$
  Et

$$u\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)e^{-\frac{\ln 2}{\ln 2}} = \frac{1}{e\ln 2}$$

- Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{\ln 2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $u(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e\ln 2}$ | $\searrow$ | $0$ |

**3.2.3.** Branches infinies de $(C)$.

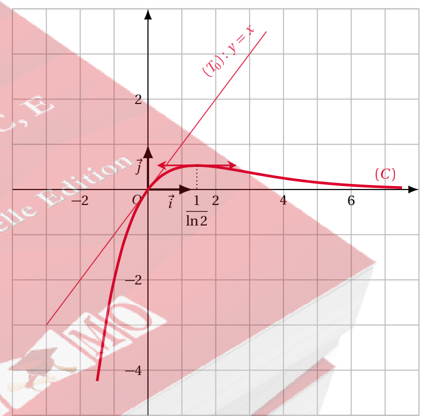
- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ donc $(C)$ admet la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) comme asymptote horizontal.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$.
  Et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{u(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x2^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2^x} = +\infty$.

Donc $(C)$ admet une branche parabolique de direction $(OJ)$ en $-\infty$.

**3.2.4.** Traçons $(C)$ et $(T_0)$ : tangente à $(C)$ au point d'abscisse 0.
On a $(T_0)$ :

$$y = u'(0)(x - 0) + u(0) \qquad (T_0)$$

$\Leftrightarrow$ $(T_0)$ : $y = x$ car $u'(0) = 1$ et $u(0) = 0$.




**3.3. 3.3.1.** Montrons que $u$ est une solution particulière de (E). On peut remarquer que

$$g(x) = xe^{-x\ln 2} = x2^{-x} = \frac{x}{2^x} = u(x)$$

Puisque $g$ est une solution particulière de (E), alors $u$ l'est aussi.

1

**3.3.2.** Déduisons la valeur de

$$\left(\ln^2 2\right)\times\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x$$

On a

$$u''(x)+(2\ln 2)\,u'(x)+(\ln 2)^2\,u(x)=0$$

$$\Rightarrow \int_0^1\left(u''(x)+(2\ln 2)\,u'(x)+(\ln 2)^2\,u(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left[u'(x)+(2\ln 2)\,u(x)\right]_0^1+(\ln 2)^2\int_0^1 u(x)=0$$

$$\Rightarrow u'(1)+(2\ln 2)\,u(1)-u'(0)-2\ln 2\,u(0)+$$

$$(\ln 2)^2\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x=0$$

$$\Rightarrow (\ln 2)^2\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x=u'(0)+2\ln 2\,u(0)-$$

$$u'(1)-(2\ln 2)\,u(1)$$

$$=1+2\ln 2\times 0-\frac{1-\ln 2}{2}-2\ln 2\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$$

**Partie B**

On considère la suite $(V_n)$ définie par

$$\begin{cases} V_0=0 \\ V_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(V_n+2^{-n}\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

**3.1.** Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$; $V_n=u(n)$.

- Pour $n=0$; on a $V_0=0$ et $u(0)=0$ donc $V_0=u(0)$.
- Supposons que $V_n=u(n)$ et montrons que $V_{n+1}=u(n+1)$.

$$V_n=u(n)=\frac{n}{2^n}$$

et

$$V_{n+1}=\frac{1}{2}\left(V_n+2^{-n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n+1}{2^n}$$

$$=\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$=u(n+1)$$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}$; $V_n=u(n)$.

**3.2.** Pour tout entier naturel on pose $S_n=\sum_{k=0}^n V_k$.

**3.2.1.** Montrons par récurrence que

$$S_n=\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^k}\right)-\frac{n+1}{2^n}\ ;\forall n\in\mathbb{N}$$

- Pour $n=0$, on a : $S_0=V_0=0$ et

$$\left(\sum_{k=0}^0\frac{1}{2^k}\right)-\frac{0+1}{2^0}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1}=0 \text{ donc}$$

$$S_0=\left(\sum_{k=0}^0\frac{1}{2^k}\right)-\frac{0+1}{2^0}$$

- Supposons $S_n=\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^k}\right)-\frac{n+1}{2^n}$ et montrons que

$$S_{n+1}=\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}\right)-\frac{(n+1)+1}{2^{n+1}}$$

On a :

$$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}V_k=\sum_{k=0}^{n}V_k+V_{n+1}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^k}\right)-\frac{n+1}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^k}\right)-\frac{n+1}{2^{n+1}}(2-1)$$

$$=\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^k}\right)-\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1-(n+2)}{2^{n+1}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n+2}{2^{n+1}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}\right)-\frac{n+2}{2^{n+1}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}\right)-\frac{(n+1)+1}{2^{n+1}}$$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}$;

$$S_n=\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^k}\right)-\frac{n+1}{2^n}$$

**3.2.2.** Calculons la limite de la suite $(S_n)$.

On sait que

$$\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^k}=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}$$

$$=2\times\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=2-\frac{1}{2^n}$$

D'où

$$S_n=2-\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} S_n &= \lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{n+2}{2^n}\right)\\ &=2-\lim_{x\to+\infty}\frac{n+2}{2^n}\\ &=2-0=2\end{aligned}$$

**Partie C**

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{e}_1=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ et $\vec{e}_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$.

**3.1.** Démontrons que $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est un repère orthonormé du plan.

Il suffit de montrer que $\det(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\neq 0$, que $\|\vec{e}_1\|=\|\vec{e}_2\|=1$ et que $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{0}$.

On a $\det(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1\neq 0.$

Aussi $\|\vec{e}_1\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$

Et $\|\vec{e}_2\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$

Enfin $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=0$

Donc $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est un repère orthonormé du plan.

**3.2.** Déterminons les éléments caractéristiques de la rotation qui transforme $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ en $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Il s'agit de la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta=\mathrm{Mes}(\vec{e}_1,\vec{i})=-\mathrm{Mes}(\vec{i},\vec{e}_1)$.

Or

$$\mathrm{Mes}(\vec{i},\vec{e}_1)=\arg(z_{\vec{e}_1})=\arg\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Donc c'est la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta=-\frac{\pi}{3}$.

**3.3.** Soit la conique $13X^2+7Y^2+6\sqrt{3}XY=16$ dans $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

**3.3.1.** Écrivons une équation cartésienne réduite de cette conique dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit $M$ un point de coordonnées $(x,y)$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $(X,Y)$ dans $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Exprimons $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.

*Méthode 1*

Puisque $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ et l'image de $(O,\vec{i},\vec{j})$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta=-\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}X+\mathrm{i}Y&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(x+\mathrm{i}y)\\ &=\left(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)(x+\mathrm{i}y)\\ &=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}X=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\\ Y=\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}x\end{cases}$$

*Méthode 2*

$\vec{OM}=X\vec{e}_1+Y\vec{e}_2$ et $\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

or

$$\begin{cases}\vec{e}_1=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\\ \vec{e}_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{i}=\frac{1}{2}\vec{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2\\ \vec{j}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2\end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\vec{OM}&=x\vec{i}+y\vec{j}\\ &=x\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2\right)+y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2\right)\\ &=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\vec{e}_1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\vec{e}_2\end{aligned}$$

D'où $\begin{cases}X=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\\ Y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\end{cases}$

Or

$$13X^2+7Y^2+6\sqrt{3}XY=16$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2+7\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2+$$
$$6\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)=16$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}xy\right)+7\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2-\right.$$
$$\left.\frac{\sqrt{3}}{2}xy\right)+6\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2-\frac{1}{2}xy\right)=16$$

$$\Leftrightarrow\frac{13}{4}x^2+\frac{39}{4}y^2+\frac{13\sqrt{3}}{2}xy+\frac{21}{4}x^2+\frac{7}{4}y^2-$$
$$\frac{7\sqrt{3}}{2}xy-\frac{9}{2}x^2-3\sqrt{3}xy+\frac{9}{2}y^2=16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+16y^2=16$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

**3.3.2.** Déduisons sa nature et son excentricité.

D'après l'équation dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la conique donnée est une ellipse car son équation est sous la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a=2$ et $b=1$

$\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$

D'où l'excentricité est : $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

## 1.2.2 Solution – Baccalauréat 2013

### Solution 4. (p. 3)

**Uniquement pour les candidats de la série C**

**4.1.** Démontrons que le reste de la division de $N$ par 100 est : $r = \overline{a_1a_0}$.

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$$
$$= a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Or $a_1 10^1 + a_0 = \overline{a_1 a_0}$

$$\Leftrightarrow N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + \overline{a_1 a_0}$$
$$= 10^2\left(a_n 10^{n-2} + a_{n-1}10^{n-3} + \cdots + a_3 10 + a_2\right) + \overline{a_1 a_0}$$

Posons $q = a_n 10^{n-2} + a_{n-1}10^{n-3} + \cdots + a_3 10 + a_2$ et $r = \overline{a_1 a_0}$.
Alors $N = 10^2 q + r = 100q + r$
Or $r = \overline{a_1 a_0} = 10a_1 + a_0 < 100$
Donc $q$ et $r$ sont respectivement les quotient et reste de la division de $N$ par 100.

**4.2.** Application : Démontrons que le chiffre des unités et le chiffre des dizaines du nombre $N = 7^{7^{7^7}}$ sont respectivement 3 et 4.
On a :

$$7 \equiv 7[100]$$
$$7^2 \equiv 7^2[100] \equiv 49[100]$$
$$7^3 \equiv 343 \equiv 43[100]$$
$$7^4 \equiv 43 \times 7[100] \equiv 301[100] \equiv 1[100]$$
$$7^5 \equiv 7[100]$$
$$7^6 \equiv 49[100]$$
$$7^7 \equiv 43[100]$$
$$\left(7^7\right)^2 \equiv 43^2[100] \equiv 49[100]$$
$$\left(7^7\right)^3 \equiv 43 \times 49[100] \equiv 2107[100] \equiv 7[100]$$
$$\left(7^7\right)^4 \equiv 49^2[100] \equiv 1[100]$$
$$\left(7^7\right)^5 \equiv 43[100]$$
$$\left(7^7\right)^6 \equiv 49[100]$$
$$\left(7^7\right)^7 \equiv 7[100]$$
$$\left(7^{7^7}\right)^2 \equiv 7^2[100] \equiv 49[100]$$
$$\left(7^{7^7}\right)^3 \equiv 7^3[100] \equiv 43[100]$$
$$\left(7^{7^7}\right)^4 \equiv 7 \times 43[100] \equiv 1[100]$$
$$\left(7^{7^7}\right)^5 \equiv 7[100]$$
$$\left(7^{7^7}\right)^6 \equiv 7^2[100] \equiv 49[100]$$
$$\left(7^{7^7}\right)^7 \equiv 43[100]$$

D'où les chiffres des unités et des dizaines de $7^{7^{7^7}}$ sont respectivement 3 et 4.

**Uniquement pour les candidats de la série E**

**4.1. 4.1.1.** Montrons que

$$F(1) = \int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$$

Soit $I = \int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x$.
Posons $u = x$ et $v' = f(x)$. Avec $u' = 1$ et $v = F(x)$.
Or on sait que $\int uv' = [uv] - \int u'v$.
Donc

$$I = \int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \left[xF(x)\right]_0^1 - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$$
$$= 1 \cdot F(x) - 0 \cdot F(0) - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$$
$$= F(1) - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow F(1) = I + \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$$

**4.1.2.** Déduisons-en que $\int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{3}$.
D'après la question précédente nous pouvons tirer que

$$\int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x = F(1) - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \qquad (1.1)$$

Or on sait que

$$\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \geq \frac{1-x^2}{2}$$
$$\Rightarrow F(1) - F(x) \geq \frac{1-x^2}{2}$$
$$\Rightarrow F(x) \leq F(1) - \frac{1-x^2}{2} \quad , \forall x$$
$$\Rightarrow \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \left(F(1) + \frac{x^2-1}{2}\right)\mathrm{d}x \leq$$
$$\left[F(1)\cdot x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x\right]_0^1 \leq F(1) + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$$
$$\leq F(1) - \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow -\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \geq -F(1) + \frac{1}{3} \qquad (1.2)$$

$$(1.1) \text{ et } (1.2) \Rightarrow \int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x \geq F(1) + \left(-F(1) + \frac{1}{3}\right) \geq \frac{1}{3}$$

**4.2. 4.2.1.** Développons et réduisons $\left(f(x)-x\right)^2$.

$$\left(f(x)-x\right)^2=\left[f(x)\right]^2-2xf(x)+x^2$$

**4.2.2.** Déduisons que $\displaystyle\int_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x\geq\frac{1}{3}$.

D'après **4.2.1.** on peut tirer que

$$\left[f(x)\right]^2=\left(f(x)-x\right)^2+2xf(x)-x^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\int_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(f(x)-x\right)^2\mathrm{d}x\\&\quad+2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(f(x)-x\right)^2\mathrm{d}x\\&\quad+2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

car $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$.

Or $\left(f(x)-x\right)^2>0$

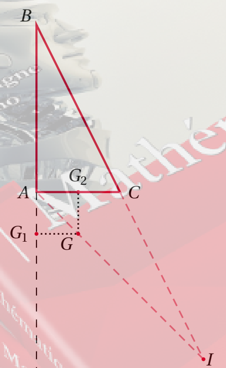
$\displaystyle\Rightarrow\int_0^1\left(f(x)-x\right)^2\mathrm{d}x>0$

Or d'après la question **4.1.2.** $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geq\frac{1}{3}$.

D'où

$$\int_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x\geq 0+2\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\geq\frac{1}{3}$$

## Solution 5. (p. 3)




**5.1.** Construisons

$$G=\text{bar}\left\{(A,3);(B,-1);(C,2)\right\}$$

- *Méthode 1* utilisation du barycentre partiel
  Posons $I=\text{bar}\left\{(B,-1);(C,2)\right\}$ alors

$$\begin{aligned}-\vec{BI}+2\vec{CI}&=\vec{0}\\\Leftrightarrow-\vec{BI}+2\vec{CB}+2\vec{BI}&=\vec{0}\\\Leftrightarrow\vec{BI}&=-2\vec{CB}=2\vec{BC}\end{aligned}$$

Autrement $C$ est le milieu de $[BI]$.

On construit ainsi $I$.
Et d'après le barycentre partiel on a :

$$G=\text{bar}\left\{(A,3);(I,1)\right\}$$

De là on peut tirer que $\vec{AG}=\frac{1}{4}\vec{AI}$ (*on en déduit ainsi la construction de G voir figure*).

- *Méthode 2*
  Étant donné que $AB=2AC$, on peut poser $C'$ le milieu de $[AB]$.
  Dans le plan $(ABC)$ on définit le repère $(A,\vec{AC},\vec{AC'})$.
  Dans ce repère $A(0,0)$, $C(1,0)$ et $B(0,2)$.
  On en déduit les coordonnées de

$$G\begin{pmatrix}\dfrac{3\times0-1\times0+2\times1}{3-1+2}\\\dfrac{3\times0-1\times2+2\times0}{3-1+2}\end{pmatrix}\Leftrightarrow G\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Placer alors le point $G\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A,\vec{AC},\vec{AC'}\right)$.

**5.2.** Déterminons l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ de l'espace vérifiant :

$$3MA^2-MB^2+2MC^2=5\lambda^2$$

$$\begin{aligned}M\in(\Gamma)&\Leftrightarrow3\vec{MA}^2-\vec{MB}^2+2\vec{MC}^2=5\lambda^2\\&\Leftrightarrow3\left(\vec{MG}+\vec{GA}\right)^2-\left(\vec{MG}+\vec{GB}\right)^2\\&\qquad+2\left(\vec{MG}+\vec{CG}\right)^2=5\lambda^2\\&\Leftrightarrow3\left(MG^2+2\vec{MG}\cdot\vec{GA}+GA^2\right)\\&\qquad-\left(MG^2+2\vec{MG}\cdot\vec{GB}+GB^2\right)\\&\qquad+2\left(MG^2+2\vec{MG}\cdot\vec{GC}+GC^2\right)=5\lambda^2\\&\Leftrightarrow\left(3MG^2-MG^2+2MG^2\right)\\&\qquad+\left(3GA^2-GB^2+2GC^2\right)+\\&\qquad+2\vec{MG}\cdot\left(3\vec{GA}-\vec{GB}+2\vec{GC}\right)=5\lambda^2\end{aligned}$$

Or $3\vec{GA}-\vec{GB}+2\vec{GC}=\vec{0}$
Car $G=\text{bar}\left\{(A,3);(B,-1);(C,2)\right\}$

$$\Leftrightarrow4MG^2+\left(3GA^2-GB^2+2GC^2\right)=5\lambda^2\qquad(1.1)$$

$$\Leftrightarrow4MG^2=5\lambda^2-\left(3GA^2-GB^2+2GC^2\right)\qquad(1.2)$$

Calculons $GA^2$, $GB^2$ et $GC^2$.
Posons $G_1$ et $G_2$ les projetés orthogonaux respectifs de $G$ sur $(AB)$ et sur $(AC)$.
Alors $AG_1=\frac{\lambda}{2}$ et $AG_2=\frac{\lambda}{2}$.
Donc

$$\begin{aligned}AG^2&=AG_1{}^2+G_1G^2\quad\text{(d'après Pythagore)}\\&=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\\&=\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^2}{4}=\frac{\lambda^2}{2}\end{aligned}$$

1

De même $CG^2 = \dfrac{\lambda^2}{2}$.

$$\begin{aligned} BG^2 &= BG_1{}^2 + G_1G_2{}^2 \\ &= \left(2\lambda + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \\ &= \frac{25\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \\ &= \frac{26\lambda^2}{4} = \frac{13\lambda^2}{2} \end{aligned}$$

Donc $AG^2 = CG^2 = \dfrac{\lambda^2}{2}$ et $BG^2 = \dfrac{13\lambda^2}{2}$.

D'où (1.2)

$$\Leftrightarrow 4MG^2 = 5\lambda^2 - \left(3 \times \frac{\lambda^2}{2} - \frac{13\lambda^2}{2} + 2 \times \frac{\lambda^2}{2}\right) = 9\lambda^2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{9}{4}\lambda^2$$

$$\Leftrightarrow MG = \frac{3}{2}\lambda$$

D'où $(\Gamma)$ est la sphère de centre $G$ et de rayon $r = \dfrac{3}{2}\lambda$.

**5.3. 5.3.1.** Coordonnées de $G$ sont

$$G\begin{pmatrix} \dfrac{3\times 0 - 1\times 0 - 2\times 0}{4} \\ \dfrac{3\times 0 - 1\times 4 + 2\times 0}{4} \\ \dfrac{3\times 0 - 1\times 0 + 2\times 2}{4} \end{pmatrix} \Leftrightarrow G\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**5.3.2.** Équation cartésienne du plan $(ABC)$ et de $(\Gamma)$.

- Équation de $(ABC)$

*Méthode 1*

$M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \vec{AM} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$

Or $\vec{AM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0\times\alpha + 0\times\beta \\ y = 4\times\alpha + 0\times\beta \\ z = 0\times\alpha + 2\times\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4\alpha \\ z = 2\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x = 0$$

Donc $(ABC): x = 0$

*Méthode 2*

$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$.

$\vec{AB} = 4\vec{j}$ et $\vec{AC} = 2\vec{k}$

Donc

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 4\vec{j} \wedge 2\vec{k} = 8\vec{j} \wedge \vec{k} = 8\vec{i}$$

D'où $\vec{n}(8,0,0)$.

Ainsi une équation cartésienne de $(ABC)$ est de la forme

$$\begin{aligned} 8x + 0y + 0z + d &= 0 \quad (d \in \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow 8x + d &= 0 \quad (d \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Or $A(0,0,0) \in (ABC)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 8\times 0 + d = 0 \\ &\Leftrightarrow d = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $(ABC): 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- Équation cartésienne de $(\Gamma)$

Comme $A(0,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,2)$ alors $AB = 4$ et $AC = 2$.

Or $\lambda = AC$ donc $\lambda = 2$.

Or nous avons établi que $(\Gamma)$ est la sphère de centre $G$ et de rayon $r = \dfrac{3\lambda}{2}$.

Donc $r = \dfrac{3}{2} \times 2 = 3$.

$(\Gamma)$ est donc la sphère de centre $G$ et de rayon $r = 3$.

Donc $M(x,y,z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow MG^2 = r^2 = 9$ or $G(0,-1,1)$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 7 = 0 \end{aligned}$$

$$(\Gamma): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 7 = 0$$

**5.3.3.** Intersection de $(ABC)$ et $(\Gamma)$.

Puisque le centre $G$ de la sphère $(\Gamma)$ est un point du plan $(ABC)$ alors l'intersection de $(ABC)$ et de $(\Gamma)$ est le cercle de centre $G$ et de rayon (le même que celui de $(\Gamma)$) $r = 3$ dans le plan $(ABC)$.

## Solution 6. (p. 3)

Soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

**6.1.** Résolvons dans $\mathbb{C}$

$$z^2\cos^2\alpha - z\sin 2\alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2\cos^2\alpha - 2z\cos\alpha\sin\alpha + 1 = 0$$

On a le discriminant

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\cos\alpha\sin\alpha)^2 - 4\cos^2\alpha \\ &= 4\cos^2\alpha\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha \\ &= 4\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha - 1\right) \\ &= 4\cos^2\alpha\left(-\cos^2\alpha\right) \text{ car } \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \\ &= -4\cos^4\alpha \\ &= \left(2\mathrm{i}\cos^2\alpha\right)^2 \end{aligned}$$

D'où

$$z = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha - 2\mathrm{i}\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}$$

ou

$$z = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha + 2\mathrm{i}\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}$$

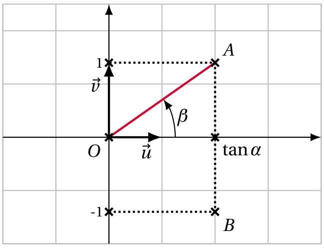
$$\Leftrightarrow z = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow z = \tan\alpha - \mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z = \tan\alpha + \mathrm{i}$$

$$S = \{\tan\alpha - \mathrm{i}, \tan\alpha + \mathrm{i}\}$$

**6.2.** Nature de $OAB$.

D'après les indications données $A(\tan\alpha+\mathrm{i})$, $B(\tan\alpha-\mathrm{i})$
D'où la figure suivante.




$$OA^2=|\tan\alpha+\mathrm{i}|^2=\tan^2\alpha+1$$

Et

$$OB^2=|\tan\alpha-\mathrm{i}|^2=\tan^2\alpha+1$$

Donc $OA=OB$
Et par conséquent $OAB$ est un triangle isocèle en $O$.

**6.3. 6.3.1.** Mesure en radian de $\left(\widehat{\vec{OB},\vec{OA}}\right)$

Soit $\beta=\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u},\vec{OA}}\right)$.

$\tan\beta=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ $\Rightarrow$ $\beta$ est le complémentaire de $\alpha$.

Donc $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$.

Donc $\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u},\vec{OA}}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$.

De même $\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u},\vec{OB}}\right)=-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

D'où

$$\begin{aligned}\text{Mes}\left(\widehat{\vec{OB},\vec{OA}}\right)&=\text{Mes}\left(\widehat{\vec{OB},\vec{u}}\right)+\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u},\vec{OA}}\right)\\&=-\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u},\vec{OB}}\right)+\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u},\vec{OA}}\right)\\&=\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha\\&=\pi-2\alpha\end{aligned}$$

**6.3.2.** Déduisons-en la mesure en radian de l'angle $\left(\widehat{\vec{BA},\vec{BO}}\right)$.

Comme $OAB$ est un triangle

$$\widehat{BOA}+\widehat{OAB}+\widehat{ABO}=\pi$$

Or $\widehat{OAB}=\widehat{ABO}$ car le triangle $OAB$ est isocèle en $O$.

$$\Rightarrow\widehat{BOA}+2\widehat{ABO}=\pi$$

$$\Rightarrow\widehat{ABO}=\frac{1}{2}\left(\pi-\widehat{BOA}\right)$$

$$\Rightarrow\text{Mes}\left(\widehat{\vec{BA},\vec{BO}}\right)=\frac{1}{2}\left(\pi-\text{Mes}\left(\widehat{\vec{OB},\vec{OA}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\pi-(\pi-2\alpha)\right)=\frac{1}{2}(2\alpha)=\alpha$$

**6.4.** Résolvons l'équation différentielle

$$\left(\cos^2\alpha\right)f''-(\sin 2\alpha)f'+f=0$$

où $f(0)=1$ et $f'(0)=-\tan\alpha$.

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est l'équation

$$z^2\cos^2\alpha-2z\cos\alpha\sin\alpha+1=0$$

que nous avons résolu à la question **6.1.** dont les solutions sont : $z_1=\tan\alpha-\mathrm{i}$ et $z_2=\tan\alpha+\mathrm{i}$.
D'où le terme général des solutions de l'équation différentielle est :

$$f(x)=(A\cos x+B\sin x)\mathrm{e}^{x\tan\alpha}\quad;(A,B\in\mathbb{R})$$

En effet lorsque l'équation caractéristique admet deux solutions $\alpha+\mathrm{i}\beta$ et $\alpha-\mathrm{i}\beta$ le terme général des solutions est

$$f(x)=\left(A\cos\beta x+B\sin\beta x\right)\mathrm{e}^{\alpha x}\quad\text{où }(A,B\in\mathbb{R})$$

Nous obtenons donc

$$f(x)=(A\cos x+B\sin x)\mathrm{e}^{x\tan\alpha}\quad;(A,B\in\mathbb{R}).$$

Où $f(0)=1$ et $f'(0)=-\tan\alpha$.
A partir de ces deux conditions nous allons déterminer les valeurs exactes de $A$ et de $B$

$$f(0)=1\Rightarrow\quad(A\cos 0+B\sin 0)\mathrm{e}^{0\tan\alpha}=1$$
$$\Rightarrow A=1$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=(-A\sin x+B\cos x)\mathrm{e}^{x\tan\alpha}+\\&\quad\tan\alpha(A\cos x+B\sin x)\mathrm{e}^{x\tan\alpha}\\&=\left[(B+A\tan\alpha)\cos x+\right.\\&\quad\left.(-A+B\tan\alpha)\sin x\right]\mathrm{e}^{x\tan\alpha}\end{aligned}$$

Or $f'(0)=-\tan\alpha$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\left[(B+A\tan\alpha)\cos 0+\right.\\&\quad\left.(-A+B\tan\alpha)\sin 0\right]\mathrm{e}^0=-\tan\alpha\\&\Rightarrow B+A\tan\alpha=-\tan\alpha\quad\text{or }A=1\\&\Rightarrow B=-2\tan\alpha\end{aligned}$$

D'où $A=1$, $B=-2\tan\alpha$.
Et par conséquent

$$f(x)=(\cos x-2\tan\alpha\sin x)\mathrm{e}^{x\tan\alpha}$$

## Solution 7. (p. 3)

**7.1. 7.1.1.** Dressons les tableaux de variation de $f$ et $g$.

- Tableau de variation de $f$ (*on sait que la fonction* ln *est strictement croissante*)

| $x$ | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- Tableau de variation de $g$.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**7.1.2.** Démontrons que $(C_f)$ et $(D)$ se coupent en deux points $M_1$ et $M_2$ dont les abscisses $x_1$ et $x_2$ vérifient : $-2 < x_1 < -1$ et $1 < x_2 < 2$

Pour cela étudions la fonction $h$ définie sur $]-2,+\infty[$, par

$$h(x) = f(x) - x = \ln(x+2) - x$$

- Signe de la variation de $h$.
  $h$ est continue et dérivable sur $]-2,+\infty[$ et on a :
  $$h'(x) = \frac{1}{x+2} - 1 = \frac{-(x+1)}{x+2}$$
  D'où le tableau de signe suivant

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-(x+1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+2$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $h'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

  De ce tableau nous tirons que $h$ est croissante sur $]-2,-1]$ et est décroissante sur $[-1,+\infty[$.
- Limites aux bornes du domaine de définition de $h$.
  $$\lim_{x\to -2^+} h(x) = \lim_{x\to -2^+} \ln(x+2) - x = -\infty$$
  $$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} h(x) &= \lim_{x\to +\infty} \ln(x+2) - x\\ &= \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\ln(x+2)}{x} - 1\right)\\ &= +\infty \times (0-1)\\ &= -\infty\end{aligned}$$
- Tableau de variation de $h$.
  De ce qui précède, nous obtenons le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $\|\| -\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

  - La restriction de $h$ sur $]-2,-1[$ est continue et strictement monotone (croissante), donc elle définit une bijection de $]-2,-1[ \to h\big(]-2,-1[\big) = ]-\infty,1[$. Or $x \in ]-\infty,1[ \iff \exists! x \in ]-2,-1[$ tel que $f(x) - x = 0 \iff \exists! x \in ]-2,-1[$ tel que $f(x) = x$. Ainsi $(C_f)$ et $(D)$ se coupent en un et un seul point $M_1$ d'abscisse $x_1$ dans l'intervalle $]-2,-1[$.
  - En raisonnant de même sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, on obtient que $(C_f)$ et $(D)$ se coupent en un et un seul point $M_2$ d'abscisse $x_2$ dans l'intervalle $]-1,+\infty[$.

  En plus $h(1) = \ln 3 - 1 > 0$ et $h(2) = \ln 4 - 2 < 0$. Donc $h(1) \times h(2) < 0$ et par conséquent $1 < x_2 < 2$.
  *Conclusion* : $(C_f)$ et $(D)$ se coupent en deux points $M_1$ et $M_2$ dont les abscisses $x_1$ et $x_2$ vérifient $-2 < x_1 < -1$ et $1 < x_2 < 2$.

**7.1.3.** Étudions les positions relatives de $(C_f)$ $(D)$.
Posons $h(x) = f(x) - x$, d'après la question précédente, on a le tableau de variation suivant

| $x$ | $-2$ | | $x_1$ | | $-1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $h(x)$ | $\|\| -\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

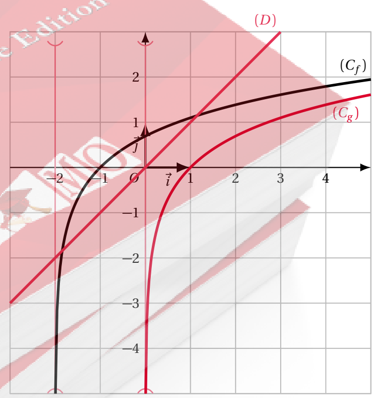
Ainsi :

- Lorsque $x \in ]-2,x_1[ \cup ]x_2,+\infty[$, $h(x) < 0$ et par conséquent $(C_f)$ est en dessous de $(D)$.
- Lorsque $x \in ]x_1,x_2[$, $h(x) > 0$ et par conséquent $(C_f)$ est au-dessus de $(D)$.
- $(C_f)$ et $(D)$ se coupent aux points d'abscisses $x_1$ et $x_2$.

**7.1.4.** Étudions les branches infinies de $(C_f)$ et $(C_g)$.

- Branches infinies de $(C_f)$ :
  - Comme $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$ alors $(C_f)$ admet la droite d'équation $x = -2$ comme asymptote verticale.
  - Aussi $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = 0$ ; donc $(C_f)$ admet, en $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
- Branches infinies de $(C_g)$ :
  De même que pour $(C_f)$, on obtient :
  - $(C_g)$ admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.
  - $(C_g)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Traçons $(C_f)$, $(C_g)$ et $(D)$




**7.2.** Démontrons que $(C_f)$ est l'image de $(C_g)$ par la translation de vecteur $2\vec{i}$.
Il suffit de montrer que $f(x) = g(x - (-2))$.

**Rappel 1.1.**

Si deux fonctions $f$ et $g$ sont tels que $\forall x$, $f(x)=g(x-a)+b$ où $a,b\in\mathbb{R}$ alors $\left(C_f\right)$ est l'image de $\left(C_g\right)$ par la translation de vecteur $a\vec{i}+b\vec{j}$.

Dans notre cas on a :

$$g\left(x-(-2)\right)=g(x+2)=\ln(x+2)=f(x)$$

D'où $\left(C_f\right)$ est l'image de $\left(C_g\right)$ par la translation de vecteur $2\vec{i}$.

**7.3.** Calculons l'aire $A$ de $(\Gamma)$ à l'aide d'une intégration par partie :
Comme dans l'intervalle $[-1,1]$, $\left(C_f\right)$ est au-dessus de $(D)$, et que l'unité sur les axes et de 2 cm, on a :

$$\begin{aligned} A&=2\times 2\int_{-1}^{1}\left(\ln(x+2)-x\right)\mathrm{d}x\\ &=4\int_{-1}^{1}\ln(x+2)\mathrm{d}x-4\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or $\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1}=1-1=0$

D'où $A=4\int_{-1}^{1}\ln(x+2)\mathrm{d}x$

Posons $u=\ln(x+2)$ et $v'=1$.

Avec $u'=\dfrac{1}{x+2}$ et $v=x$.

$$\begin{aligned} A&=4\left(\left[x\ln(x+2)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x}{x+2}\mathrm{d}x\right)\\ &=4\left(\ln 3+\ln 1-\int_{-1}^{1}\frac{x+2-2}{x+2}\mathrm{d}x\right)\\ &=4\left(\ln 3-\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x\right)\\ &=4\left(\ln 3-\left[x-2\ln|x+2|\right]_{-1}^{1}\right)\\ &=4\left(\ln 3-(1-2\ln 3+1+2\ln 1)\right)\\ &=4(3\ln 3-2)(\mathrm{cm}^2)\end{aligned}$$

**7.4.** Démontrons que $x_1<f(\alpha)<x_2<f(\beta)$.
Comme $f$ est strictement croissante et que $x_1<\alpha<x_2<\beta$.
Alors $f(x_1)<f(\alpha)<f(x_2)<f(\beta)$.
Or $f(x_1)=x_1$ et $f(x_2)=x_2$ car $x_1$ et $x_2$ sont les abscisses des points d'intersections de $\left(C_f\right)$ et $(D)$.
Donc $x_1<f(\alpha)<x_2<f(\beta)$.

**7.5.** **7.5.1.** Démontrons que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante.
Il suffit de montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\geq u_n$.
Pour cela nous allons procéder par récurrence.

**7.5.1.1.** Vérifions que $u_1\geq u_0$.
$u_0=1$ et $u_1=f(u_0)=\ln(u_0+2)=\ln 3>1$.
Donc $u_1\geq u_0$.

**7.5.1.2.** Supposons que $u_{n+1}\geq u_n$ et montrons aussi que $u_{n+2}\geq u_{n+1}$.
On sait que $f$ est croissante. Donc comme $u_{n+1}\geq u_n$, alors $f(u_{n+1})\geq f(u_n)$
$\Rightarrow\ u_{n+2}\geq u_{n+1}$.

**7.5.2.** Démontrons que la suite $\left(v_n\right)$ est décroissante.
Nous allons également procéder par récurrence.
Il suffit de montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}\geq v_n$.

**7.5.2.1.** Vérifions que $v_1\geq v_0$.
$v_0=2$ et $v_1=f(v_0)=\ln(2+2)=\ln 4<2$.
Donc $v_1\geq v_0$.

**7.5.2.2.** Supposons que $v_{n+1}\geq v_n$ et montrons aussi que $v_{n+2}\geq v_{n+1}$.
On sait que $f$ est croissante. Donc comme $v_{n+1}\geq v_n$, alors $f(v_{n+1})\geq f(v_n)$
$\Rightarrow\ v_{n+2}\geq v_{n+1}$.

**7.5.3.** Démontrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $1\leq u_n\leq x_2\leq v_n\leq 2$.
Nous allons aussi procéder par récurrence

**7.5.3.1.** Vérifions que $1\leq u_0\leq x_2\leq v_0\leq 2$
$u_0=1$ et $v_0=2$ et à la question **7.5.2.2.** nous avons obtenu que $1<x_2<2$. Donc $1\leq u_0\leq x_2\leq v_0\leq 2$

**7.5.3.2.** Supposons que $1\leq u_n\leq x_2\leq v_n\leq 2$ et montrons aussi que $1\leq u_{(n+1)}\leq x_2\leq v_{(n+1)}\leq 2$
Comme $f$ est croissante, alors

$$\begin{aligned} &1\leq u_n\leq x_2\leq v_n\leq 2\\ &\Rightarrow f(1)\leq f(u_n)\leq f(x_2)\leq f(v_n)\leq f(2)\\ &\Rightarrow \ln 3\leq u_{(n+1)}\leq x_2\leq v_{(n+1)}\leq \ln 4\end{aligned}$$

car $f(u_n)=u_{(n+1)}$, $f(v_n)=v_{(n+1)}$ et $f(x_2)=x_2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1\leq\ln 3\leq u_{(n+1)}\leq x_2\leq v_{(n+1)}\leq\ln 4\leq 2\\ &\Rightarrow 1\leq u_{(n+1)}\leq x_2\leq v_{(n+1)}\leq 2\end{aligned}$$

De **7.5.3.1.** et **7.5.3.2.** nous pouvons conclure que $\forall n\in\mathbb{N}$, $1\leq u_n\leq x_2\leq v_n\leq 2$.

**7.5.4.** Démontrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $1\leq u_n\leq x_2\leq v_n\leq 2$.
Nous allons aussi procéder par récurrence.

**7.5.4.1.** Vérifions que $1\leq u_0\leq x_2\leq v_0\leq 2$.
$u_0=1$ et $v_0=2$ et à la question **7.1.2.** nous avons obtenu que $1<x_2<2$. Donc $1\leq u_0\leq x_2\leq v_0\leq 2$.

**7.5.4.2.** Supposons que $1\leq u_n\leq x_2\leq v_n\leq 2$ et montrons aussi que $1\leq u_{n+1}\leq x_2\leq v_{n+1}\leq 2$
Comme $f$ est croissante, alors

$$\begin{aligned} &1\leq u_n\leq x_2\leq v_n\leq 2\\ &\Rightarrow f(1)\leq f(u_n)\leq f(x_2)\leq f(v_n)\leq f(2)\\ &\Rightarrow \ln 3\leq u_{n+1}\leq x_2\leq v_{n+1}\leq \ln 4\end{aligned}$$

car $f(u_n)=u_{n+1}$, $f(v_n)=v_{n+1}$ et $f(x_2)=x_2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1\leq\ln 3\leq u_{n+1}\leq x_2\leq v_{n+1}\leq\ln 4\leq 2\\ &\Rightarrow 1\leq u_{n+1}\leq x_2\leq v_{n+1}\leq 2\end{aligned}$$

De **7.5.4.1.** et **7.5.4.2.** nous pouvons conclure que $\forall n\in\mathbb{N}$, $1\leq u_n\leq x_2\leq v_n\leq 2$.

**7.6.**

**7.6.1.** Démontrons que $\forall x\in I$, $\frac{1}{4}\leq f'(x)\leq\frac{1}{3}$.
On sait que $f(x)=\ln(x+2)$
$\Rightarrow\ f'(x)=\dfrac{1}{x+2}$
$\forall x\in I$, $1\leq x\leq 2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 3\leq x+2\leq 4\\ &\Rightarrow \frac{1}{4}\leq\frac{1}{x+2}\leq\frac{1}{3}\\ &\Rightarrow \frac{1}{4}\leq f'(x)\leq\frac{1}{3}\end{aligned}$$

**7.6.2.** Déduisons en que : $\forall n\in\mathbb{N}$

$$0<f(v_n)-f(u_n)\leq\frac{1}{3}\left(v_n-u_n\right)$$

Puisque $1 \leq u_n \leq v_n \leq 2$ (d'après **7.5.4.**) et que $0 < \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3}$ (d'après **7.6.1.**).
Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$0 \times (v_n - u_n) < f(v_n) - f(u_n) \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

$$\Rightarrow 0 < f(v_n) - f(u_n) \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

**7.7. 7.7.1.** Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Nous allons procéder par récurrence sur $n$.
**7.7.1.1.** Pour $n = 0$.
On a $v_0 = 2$, $u_0 = 1$.
Et $2 - 1 = 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$.
On a bien

$$0 < 1 \leq 1 \Rightarrow 0 < v_0 - u_0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

**7.7.1.2.** Supposons que $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et montrons que

$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

D'après **7.6.2.**

$$0 < f(v_n) - f(u_n) \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

$$\Rightarrow 0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

Or nous avons supposé que $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\Rightarrow 0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

D'après **7.7.1.1.** et **7.7.1.2.**, nous déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

**7.7.2.** Déduisons en que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent et ont la même limite.
D'après **7.5.1.** et **7.5.3.**, $(u_n)$ est croissante et majorée par 2. Donc est convergente.
Aussi d'après **7.5.2.** et **7.5.3.**, $(v_n)$ est décroissante et minorée par 1. Donc est convergente.
D'après **7.7.1.**

$$0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$
D'où d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n - \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

Ainsi $(u_n)$ et $(v_n)$ convergente et ont la même limite.

## 1.2.3 Solution – Baccalauréat 2014

### Solution 8. (p. 4)

Démontrons que $A$, $B$, $C$ et $D$ ne sont pas coplanaires.
Il suffit de montrer que $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} \neq 0$.

$\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC}\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right)$

$\Rightarrow \quad \vec{AB} \wedge \vec{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

D'où $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 2 \neq 0$
Ainsi $A$, $B$, $C$ et $D$ ne sont pas coplanaires.
**8.1. 8.1.1.** Équation cartésienne du plan $(ABC)$.
Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (ABC)$, alors $\vec{AM} \perp (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$

$\Leftrightarrow \quad \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$

Or $\vec{AB} \wedge \vec{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix}$

D'où

$$\begin{aligned} & -4(x-1) + 2(y+1) + 6z = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -2(x-1) + y + 1 + 3z = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -2x + y + 3z + 3 = 0 \end{aligned}$$

$(ABC) : -2x + y + 3z + 3 = 0$
**8.1.2.** Volume de $ABCD$.
On sait que

$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}\right|$$

Nous avons obtenu à la question **8.1.** que $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 2$
D'où

$$V = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}\,(u \cdot v)$$

**8.1.3.** Expression analytique de la réflexion $f$ par rapport au plan $(ABC)$.
Soit $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ son image par rapport à $f$.
Le milieu de $[MM']$, $I\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right) \in (ABC)$

et le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à

$(ABC)$.
On a donc $I \in (ABC)$ et $\vec{MI} // \vec{n}$.
$\Leftrightarrow \quad I \in (ABC)$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{MI} = \alpha\vec{n}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\left(\frac{x+x'}{2}\right)+\frac{y+y'}{2}+3\left(\frac{z+z'}{2}\right)+3=0 \\ \frac{x-x'}{2}=-2\alpha \\ \frac{y-y'}{\alpha}=\alpha \\ \frac{z-z'}{2}=3\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\left(x+x'\right)+y+y'+3\left(z+z'\right)+6=0 & (1.1) \\ x'=x+4\alpha & (1.2) \\ y'=y-2\alpha & (1.3) \\ z'=z-6\alpha & (1.4) \end{cases}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$
(1.2), (1.3) et (1.4) dans (1.1) donne

$$\begin{aligned} &-2(x+x+4\alpha)+y+y-2\alpha \\ &\quad +3(z+z-6\alpha)+6=0 \\ \Rightarrow\ &-4x-8\alpha+2y-2\alpha+6z-18\alpha+6=0 \\ \Rightarrow\ &-28\alpha=4x-2y-6z-6 \\ \Rightarrow\ &\alpha=\frac{1}{14}\left(-2x+y+3z+3\right) \qquad (1.5) \end{aligned}$$

(1.5) dans (1.2), (1.3) et (1.4) donne

$$\begin{cases} x'=x-\frac{4}{14}\left(2x-y-3z-3\right) \\ y'=y+\frac{2}{14}\left(2x-y-3z-3\right) \\ z'=z+\frac{6}{14}\left(2x-y-3z-3\right)[1ex] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{7}\left(3x+2y+6z+6\right) \\ y'=\frac{1}{7}\left(2x+6y-3z-3\right) \\ z'=\frac{1}{7}\left(6x-3y-2z-9\right) \end{cases}$$

**8.2.** Nature et éléments caractéristiques de $\left(S'\right)$
$(S)$ est la sphère de centre $D$ et de rayon $DB$.
Or $\vec{DB}=(2,0,1) \Rightarrow DB=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.
$(S)$ est donc la sphère de centre $D$ et de rayon $\sqrt{5}$.
$f$ étant une réflexion par rapport à un plan est une isométrie.
D'où $\left(S'\right)$ est la sphère de centre $D'=f(D)$ et de rayon $\sqrt{5}$.
Il ne suffit plus qu'à déterminer $D'=f(D)$ (*en utilisant l'expression analytique de* $f$).
On sait que $D(1,0,0)$
Donc les coordonnées de $D'$ sont :

$$\begin{aligned} x'&=\frac{1}{7}(3(1)+2(0)+6(0)+6)=\frac{9}{7} \\ y'&=\frac{1}{7}(2(1)+6(0)-3(0)-3)=-\frac{1}{7} \\ z'&=\frac{1}{7}(6(1)-3(0)-2(0)-9)=-\frac{3}{7} \end{aligned}$$

D'où $D'\left(\frac{9}{7},-\frac{1}{7},-\frac{3}{7}\right)$

## Solution 9. (p. 4)

**9.1. 9.1.1.** Déterminons les réels $a$ et $b$ pour lesquels $g$ est une solution de $(E)$.
On a :

$$\begin{aligned} &g(x)=a\cos x+b\sin x \\ \Rightarrow\ &g'(x)=-a\sin x+b\cos x \end{aligned}$$

et

$$g''(x)=-a\cos x-b\sin x$$

$g$ solution de $(E)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow g''(x)-4g'(x)+4g(x)=2\cos x+\sin x \\ &\Leftrightarrow -a\cos x-b\sin x-4(-a\sin x+b\cos x) \\ &\qquad +4(a\cos x+b\sin x)=2\cos x+\sin x \\ &\Leftrightarrow (-a-4b+4a)\cos x+(-b+4a+4b)\sin x \\ &\qquad =2\cos x+\sin x,\ \forall x \\ &\Leftrightarrow (3a-4b)\cos x+(4a+3b)\sin x=2\cos x \\ &\qquad +\sin x,\ \forall x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-4b=2 & (1.1) \\ 4a+3b=1 & (1.2) \end{cases}$$

$3\times(1.1)+4\times(1.2)$ donne

$$\begin{aligned} &9a+16a=6+4 \\ \Leftrightarrow\ &25a=10 \\ \Leftrightarrow\ &a=\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$(1.2) \Leftrightarrow 4\left(\frac{2}{5}\right)+3b=1 \Leftrightarrow b=-\frac{1}{5}$

Donc $a=\frac{2}{5}$ et $b=-\frac{1}{5}$.
**9.1.2.** Montrons que $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $f-g$ est solution de $\left(E_0\right)$.
$f$ est solution de $(E)$ ssi

$$f''-4f'+4f=2\cos x+\sin x$$

Or

$$2\cos x+\sin x=g''-4g'+4g$$

car $g$ est solution de $(E)$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow f''-4f'+4f=g''-4g'+4g \\ &\Leftrightarrow f''-g''-4f'+4g'+4f-4g=0 \\ &\Leftrightarrow \left(f-g\right)''-4\left(f-g\right)'+4\left(f-g\right)=0 \end{aligned}$$

D'où $f-g$ est solution de $\left(E_0\right)$.
**9.1.3.** Résolvons $\left(E_0\right)$.
L'équation caractéristique associée à $\left(E_0\right)$ est

$$r^2-4r+4=0$$

Résolvons (**9.1.3.**)

1

$\Delta = (-4)^2 - 4\times 4 = 16 - 16 = 0$

$\Rightarrow r_0 = \dfrac{4}{2} = 2$

D'où (**9.1.3.**) admet une solution double $r_0 = 2$.

Ainsi la forme générale des solutions de $(E_0)$ est :

$$h(x) = (Ax+B)e^{2x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

- Forme générale des solutions de $(E)$

  $f$ est solution de $(E)$ ssi $f - g$ est solution de $(E_0)$ (d'après **9.1.2.**)

$$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = (Ax+B)e^{2x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (Ax+B)e^{2x} + g(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (Ax+B)e^{2x} + \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$$

La forme générale des solutions de $(E)$ est :

$$x \mapsto (Ax+B)e^{2x} + \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x \ (A, B \in \mathbb{R})$$

**9.2.**

**9.2.1.** Calculons $h'(x)$ er $h''(x)$ $\forall x \in [0, \pi[$.

$$h'(x) = -\frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$$

$$\text{et } h''(x) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

**9.2.2.** Étude des variations de $h'$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

$\forall x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\cos x \leq 0$ et $\sin x \geq 0$

$-\dfrac{2}{5}\cos x \geq 0$ et $\dfrac{1}{5}\sin x \geq 0 \Rightarrow h''(x) \geq 0$.

Donc $h'$ est croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

- Déduisons que $h'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ avec $2{,}6 < \alpha < 2{,}7$.

  $h'$ est continu et croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ donc, sa restriction sur cet intervalle, définit une bijection de $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ vers $h'\left(\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.

  Or $h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{5}$ et $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} h'(x) = \frac{2}{5}$.

  D'où

$$h'\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right) = \left[-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right[$$

  Or $0 \in \left[-\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}\right[$ donc il existe un unique $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $h'(\alpha) = 0$.

  Aussi $h'(2.6) \approx -0{,}035 < 0$ et $h'(2{,}7) \approx 0{,}01 > 0$.

  D'où $2{,}6 < \alpha < 2{,}7$.

- Montrons que $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]\alpha, \pi[$.

  - Pour $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, on a vu que $h'$ est continue et strictement croissante et que $h'(\alpha) = 0$.

    Donc pour ce cas $h'(x) > 0$ si et seulement si $x \in ]\alpha, \pi[$.

  - Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

    On a $\cos x > 0$ et $\sin x \geq 0$

    $\Leftrightarrow -\dfrac{2}{5}\cos x < 0$ et $-\dfrac{2}{5}\sin x \leq 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$.

    Donc $h'(x) > 0$ n'est pas possible dans ce cas.

    Ainsi on a $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]\alpha, \pi[$.

- Tableau de variation de $h$.

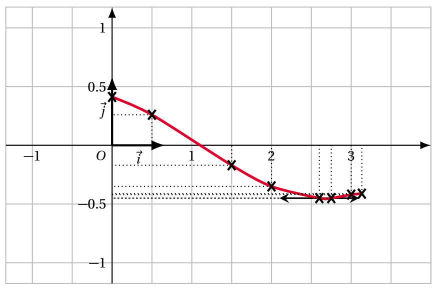
  $h$ est croissante sur $]\alpha, \pi[$ et décroissante sur $[0, \alpha[$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $h(x)$ | $\frac{2}{5}$ | $\searrow$ | $h(\alpha)$ | $\nearrow$ | $-\frac{2}{5}$ |

- Traçons $(C)$.

  Tableau de valeurs particulières.

| $x$ | 0,5 | 1,5 | 2 | 2,6 | 2,75 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 0,26 | −0,17 | −0,35 | −0,45 | −0,45 | −0,42 |




## Solution 10. (p. 4)

**10.1.** **10.1.1.** Montrons que $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $1 - a < \dfrac{1}{1+a} < 1$.

$\forall a \in ]0, +\infty[$ on a $1 + a > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+a} < 1$.

Et $1 - a - \dfrac{1}{1+a} = \dfrac{1 - a^2 - 1}{1+a} = -\dfrac{a^2}{1+a} < 0$

$\Rightarrow 1 - a < \dfrac{1}{1+a}$

D'où $1 - a < \dfrac{1}{1+a} < 1$.

**10.1.2.** Déduisons que $a - \dfrac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a$.

On a $\forall x \in ]0, +\infty[$, $1 - x < \dfrac{1}{1+x} < 1$ (*d'après* **10.1.1.**)

$$\Rightarrow \int_0^a (1-x)\,dx < \int_0^a \frac{1}{1+x}\,dx < \int_0^a 1\,dx$$

$$\Rightarrow \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^a < [\ln(1+x)]_0^a < [x]_0^a$$

$$\Rightarrow a - \frac{a^2}{2} < \ln(1+a) - \ln 1 < a$$

$$\Rightarrow a - \frac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a \text{ car } \ln 1 = 0$$

**10.2.** **10.2.1.** Justifions que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Nous allons procéder par récurrence sur $n$.

**10.2.1.1.** Pour $n=1$ on a $1^2=1$ et $\frac{1(1+1)(1+2)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=\frac{6}{6}=1$.

**10.2.1.2.** Supposons que $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

On a

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &+(n+1)^2\\ &=\frac{n+1}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]\\ &=\frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right)\\ &=\frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)\end{aligned}$$

D'où $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**10.2.1.3.** Montrons que

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}<\ln P_n<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}\ln P_n &=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\\ &=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\\ &\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Or $a-\frac{a^2}{2}<\ln(1+a)<a, \forall a>0.$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}-\frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}{2}+\frac{2}{n^2}-\frac{\left(\frac{2}{n^2}\right)^2}{2}+\cdots+\frac{n}{n^2}-\frac{\left(\frac{n}{n^2}\right)^2}{2}<\ln P_n<\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{2^2}{n^4}+\cdots+\frac{n^2}{n^4}\right)<\ln P_n<\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}-\frac{1}{2n^4}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)<\ln P_n<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

Or $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Et $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{1}{2n^4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}<\ln P_n<\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}<\ln P_n<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

**10.2.2.** Déduisons en que $P_n$ converge et déterminons sa limite.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}=0$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

Ainsi d'après le théorème des gendarmes $\ln P_n$ converge et $\lim_{n\to+\infty}\ln P_n=\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}P_n=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$

Donc $(P_n)$ converge vers $\sqrt{\mathrm{e}}$

## Solution 11. (p. 4)

### Partie A

**11.1. 11.1.1.** Montrons que $\forall M\in(P), \Psi\circ\Psi(M)=M$

Soit $M'=\Psi(M)$ et $M''=\Psi(M')$.

Alors

$$\vec{OM'}=\frac{4}{OM^2}\vec{OM} \tag{1.1}$$

Et

$$\vec{OM''}=\frac{4}{OM'^2}\vec{OM'} \tag{1.2}$$

$(1.1)\Rightarrow OM'=\frac{4}{OM^2}OM=\frac{4}{OM}$

D'où (1.2)

$$\begin{aligned}\Rightarrow\vec{OM''}&=\frac{4}{\left(\frac{4}{OM}\right)^2}\times\frac{4}{OM^2}\vec{OM}\\ &=\frac{4OM^2}{16}\times\frac{4}{OM^2}\vec{OM}\\ &=\vec{OM}\\ \Rightarrow M''&=M\end{aligned}$$

D'où, $\Psi\circ\Psi(M)=M$

**11.1.2.** Justifions que l'ensemble des points $M$ de $(P)$ distincts de $O$ tels que $\Psi(M)=M$, est le cercle de centre $O$ et de rayon 2.

Soit $M\neq O$ tel que $\Psi(M)=M$.

$$\begin{aligned}&\Psi(M)=M\\ \Leftrightarrow&\vec{OM'}=\vec{OM}\\ \Leftrightarrow&\frac{4}{OM^2}=\vec{OM}\\ \Leftrightarrow&\frac{4}{OM^2}=1\\ \Leftrightarrow&OM^2=4\\ \Leftrightarrow&OM=2\end{aligned}$$

D'où l'ensemble des points $M$ de $(P)$ distincts de $O$ tels

1

que $\Psi(M)=M$, est le cercle de centre $O$ et de rayon 2.

**11.2.** Justifions que $(d)$ est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $z=a+it$ $(t\in\mathbb{R})$.

$M(x,y)\in(d)\Leftrightarrow\ \vec{OM}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$.

Or $\vec{OD}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$

$\Leftrightarrow\ \vec{DM}=(x-a)\vec{e}_1+(y-b)\vec{e}_2$

Or $\vec{e}_2$ est un vecteur directeur de (d) et $M$ et $D\in(d)$.

$\Leftrightarrow\ \vec{DM}//\vec{e}_2$ or $\vec{DM}=(x-a)\vec{e}_1+(y-b)\vec{e}_2$

$\Leftrightarrow\ x-a=0\ \Leftrightarrow\ x=a$

D'où $\vec{OM}=a\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ $(y\in\mathbb{R})$ soit encore $z=a+it$ $(t\in\mathbb{R})$

**11.3.** **11.3.1.** Montrons que $\Psi(M)=M'\ \Leftrightarrow\ z'=\dfrac{4}{\overline{z}}$

$\Psi(M)=M'\ \Leftrightarrow\ \vec{OM'}=\dfrac{4}{OM^2}\vec{OM}$

$\Leftrightarrow\ z'=\dfrac{4}{|z|^2}\times z$ or $|z|^2=z\cdot\overline{z}$

$\Leftrightarrow\ z'=\dfrac{4}{z\cdot\overline{z}}\times z=\dfrac{4}{\overline{z}}$

**11.3.2.** Posons $\vec{OM}=a\vec{e}_1+t\vec{e}_2$ et $\vec{OM'}=x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2$

Montrons que $\Psi(M)=M'\ \Leftrightarrow\ x'=\dfrac{4a}{a^2+t^2}$ et $y'=\dfrac{4t}{a^2+t^2}$

$$\begin{aligned}&\vec{OM}=a\vec{e}_1+t\vec{e}_2\\ \Rightarrow\ &OM^2=a^2+t^2\\ \Rightarrow\ &\vec{OM'}=\frac{4}{a^2+t^2}\vec{OM}=\frac{4}{a^2+t^2}\left(a\vec{e}_1+t\vec{e}_2\right)\\ &=\frac{4a}{a^2+t^2}\vec{e}_1+\frac{4t}{a^2+t^2}\vec{e}_2\end{aligned}$$

Or $\vec{OM'}=x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2$

$\Leftrightarrow\ x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2=\dfrac{4a}{a^2+t^2}\vec{e}_1+\dfrac{4t}{a^2+t^2}\vec{e}_2$

D'où $x'=\dfrac{4a}{a^2+t^2}$ et $y'=\dfrac{4t}{a^2+t^2}$.

**11.3.3.** Vérifions dans ce cas que $\left(x'-\dfrac{2}{a}\right)^2+y'^2=\dfrac{4}{a^2}$.

$$\begin{aligned}\left(x'-\frac{2}{a}\right)^2+y'^2&=\left(\frac{4a}{a^2+t^2}-\frac{2}{a}\right)^2+\left(\frac{4t}{a^2+t^2}\right)^2\\ &=\left(\frac{2a^2-2t^2}{a(a^2+t^2)}\right)^2+\left(\frac{4t}{a^2+t^2}\right)^2\\ &=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2+t^2}\right)^2\left[\left(2a^2-2t^2\right)^2+\right.\\ &\qquad\left.(4at)^2\right]\\ &=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2+t^2}\right)^2\left[\left(2a^2\right)^2+\right.\\ &\qquad\left.\left(2t^2\right)^2-2\times(2a)\times(2t)+16a^2t^2\right]\\ &=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2+t^2}\right)^2\left(2a^2+2t^2\right)^2\\ &=\frac{4\times\left(a^2+t^2\right)^2}{a^2\left(a^2+t^2\right)^2}=\frac{4}{a^2}\end{aligned}$$

**11.3.4.** Déduisons que si $M\in(d)$ alors $\Psi(M)$ appartient au cercle de diamètre $[OH']$

Soit $M\in(d)$. Alors d'après **11.2.**, $z=a+it\ \Rightarrow\ \vec{OM'}=a\vec{e}_1+t\vec{e}_2$.

Et donc d'après **11.3.2.** et **11.3.3.**, $\left(x'-\dfrac{2}{a}\right)^2+y'^2=\dfrac{4}{a^2}$.

Le projeté orthogonal $H$ de $O$ sur (d) à pour coordonnées $H(a,0)$.

Donc $OH=a$.

Ainsi $\vec{OH'}=\dfrac{4}{a^2}\vec{OH}=\dfrac{4}{a^2}\left(a\vec{e}_1+0\vec{e}_2\right)=\dfrac{4}{a}\vec{e}_1$.

Donc $H'\left(\dfrac{4}{a},0\right)$.

Or $\left(x'-\dfrac{2}{a}\right)^2+y'^2=\dfrac{4}{a^2}=\left(\dfrac{2}{a}\right)^2$

$\Leftrightarrow$ $M'$ appartient au cercle de centre $I\left(\dfrac{2}{a},0\right)$ et de rayon $r=\dfrac{2}{a}$.

Or le milieu de $[OH']$ est $K\left(\dfrac{0+\frac{4}{a}}{2},\dfrac{0+0}{2}\right)=\left(\dfrac{2}{a},0\right)=I$

Et $\dfrac{OH'}{2}=\dfrac{\frac{4}{a}}{2}=\dfrac{2}{a}=r$

Ainsi $M$ appartient au cercle de diamètre $[OH']$.

**11.4.** Montrons que l'image de $(C_1)$ par $h$ est une ellipse.

Soit $M(x,y)$ un point de $(C_1)$.

$\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{2}{a}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{a^2}$

et $M'=h(M)\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x\\ y'=\dfrac{2}{3}y\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\ y=\dfrac{3}{2}y'\end{cases}$

D'où

$$\left(x'-\frac{2}{a}\right)^2+\left(\frac{3}{2}y'\right)^2=\frac{4}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\left(x'-\frac{2}{a}\right)^2}{\left(\frac{2}{a}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{2}{a}\times\frac{2}{3}\right)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\left(x'-\frac{2}{a}\right)^2}{\left(\frac{2}{a}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{4}{3a}\right)^2}=1$$

Posons $A=\left|\dfrac{2}{a}\right|$ et $B=\left|\dfrac{4}{3a}\right|$.

Alors on a $\dfrac{\left(x'-\frac{2}{a}\right)^2}{A^2}+\dfrac{y'^2}{B^2}=1$

Où $\dfrac{A}{B}=\dfrac{\frac{2}{a}}{\frac{4}{3a}}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}>1$ donc $A>B$.

L'image de $(C_1)$ est donc une ellipse de centre $\Omega\left(\dfrac{2}{a},0\right)$ et d'excentricité

$$e=\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{A}$$

$$= \frac{\sqrt{\dfrac{2^2}{a^2} - \left(\dfrac{4}{3a}\right)^2}}{\left|\dfrac{2}{a}\right|}$$

$$= \frac{\left|\dfrac{2}{a}\right|\sqrt{1-\dfrac{2^2}{3^2}}}{\left|\dfrac{2}{a}\right|}$$

$$= \sqrt{1-\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3}$$

**Partie B**

**11.1.** Exprimons $\phi\left(\dfrac{4}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right)$ en fonction de $\vec{v}$

$$\phi\left(\frac{4}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right) = \frac{4}{\left\|\dfrac{4}{\|\vec{v}\|^2}\right\|^2} \times \frac{4}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

$$= \frac{4}{\left(\dfrac{4}{\|\vec{v}\|^2}\right)^2 \cdot \|\vec{v}\|^2} \times \frac{4}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

$$= \frac{16}{\dfrac{16}{\|\vec{v}\|^4} \times \|\vec{v}\|^4} \times \vec{v}$$

$$= \vec{v}$$

- Déduisons que $\phi$ n'est pas une application linéaire.
  Si $\phi$ est une application linéaire alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\phi(a\vec{u}) = a\phi(\vec{u})$.
  Et en particulier

$$\phi\left(\frac{4}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right) = \frac{4}{\|\vec{v}\|^2}\phi(\vec{v})$$

$$= \frac{4}{\|\vec{v}\|^2} \times \frac{4}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

$$= \frac{16}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

Or $\phi\left(\dfrac{4}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right) = \vec{v}$ *(d'après la question précédente)*

Donc pour $\|\vec{v}\|^2 \neq 16$, $\phi\left(\dfrac{4}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right) \neq \dfrac{4}{\|\vec{v}\|^2}\phi(\vec{v})$.

Ainsi $\phi$ n'est pas une application linéaire.

**11.2.** **11.2.1.** Déterminons $\mathrm{Inv}(\phi)$.

$$\mathrm{Inv}(\phi) = \left\{\vec{u} \in (\vec{P}) / \phi(\vec{u}) = \vec{u}\right\}$$

$$\phi(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\|\vec{u}\|^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 2$$

Donc

$$\mathrm{Inv}(\phi) = \left\{\vec{u} \in (\vec{P}) / \|\vec{u}\| = 2\right\}$$

**11.2.2.** Calculons $\left\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right\|$

$$\left\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right\| = \sqrt{(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)^2}$$

$$= \sqrt{\left\|\vec{u}_1\right\|^2 + \left\|\vec{u}_2\right\|^2 + 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}$$

$$= \sqrt{\left\|\vec{u}_1\right\|^2 + \left\|\vec{u}_2\right\|^2 + 2\left\|\vec{u}_1\right\| \cdot \left\|\vec{u}_2\right\| \cdot \cos(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)}$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2 \times 2 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \text{car } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

- Déduisons en que $\mathrm{Inv}(\phi)$ n'est pas un sous espace vectoriel.
  S'il était un sous espace vectoriel alors $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{Inv}(\phi)$, on aurait $\vec{u} + \vec{v} \in \mathrm{Inv}(\phi)$.
  Or $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2 \in \mathrm{Inv}(\phi)$ car $\left\|\vec{u}_1\right\| = \left\|\vec{u}_2\right\| = 2$
  Et comme $\left\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right\| = 2\sqrt{3} \neq 2$ alors $\left\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right\| \notin \mathrm{Inv}(\phi)$
  D'où $\mathrm{Inv}(\phi)$ n'est pas un sous espace vectoriel.

**11.3.** Déterminons $\mathrm{Opp}(\phi)$.

$\forall \vec{u} \in \mathrm{Opp}(\phi)$, $\phi(\vec{u}) = -\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = -\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\|\vec{u}\|^2} = -1$$

qui est impossible car $\forall \vec{u}$, $\dfrac{4}{\|\vec{u}\|^2} > 0$ alors que $-1 < 0$.

D'où $\mathrm{Opp}(\phi) = \emptyset$.

Or on sait que $\emptyset$ est une sous espace vectoriel donc $\mathrm{Opp}(\phi)$ est un sous espace vectoriel.

### 1.2.4 Solution – Baccalauréat 2015

**Solution 12. (p. 5)**

$$\begin{cases} x = \sqrt{2y+3} \\ y = \sqrt{2z+3} \\ z = \sqrt{2x+3} \end{cases}$$

**12.1.** **Série E**

**12.1.1.** Montrons que le triplet $(3;3;3)$ est solution de ce système

On a : $\begin{cases} \sqrt{2\times3+3} = \sqrt{9} = 3 \\ \sqrt{2\times3+3} = \sqrt{9} = 3 \\ \sqrt{2\times3+3} = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$

Donc $(3;3;3)$ est une solution de ce système.

**12.1.2.** Montrons que si $(x;y;z)$ est solution du système on ne peut pas avoir $x < 3$.

Nous allons procéder par l'absurde.

Supposons $x < 3$.

Si $x < 3$, alors $\sqrt{2x+3} < \sqrt{2\times3+3} = 3$

$\Rightarrow z < 3$

Et de même $y < 3$.

Donc si $x<3$, alors $x,y,z<3$
Aussi $x,y,z\geq 0$ car $\sqrt{\alpha}>0$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$
Donc $0\leq x<3$, $0\leq y<3$ et $0\leq z<3$
Posons la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$, par $f(x)=x^2-(2x+3)$.
*Étudions le signe de f*
$f(x)=x^2-(2x+3)=(x+1)(x-3)$
Or $\forall x\geq 0$, $x+1\geq 1>0$
Donc $f(x)$ est de même signe que $x-3$ sur $[0;+\infty[$
Donc $f(x)<0$ si $x<3$
$f(x)>0$ si $x>3$
Et $f(x)=0$ si $x=3$
Ainsi comme $x<3$, $f(x)<0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow x^2<2x+3\\&\Rightarrow x<\sqrt{2x+3}\\&\Rightarrow x<z\end{aligned}\tag{1.1}$$

De même comme $z<3$,

$$z<\sqrt{2z+3}\quad\Rightarrow\quad z<y\tag{1.2}$$

Et aussi

$$y<\sqrt{2y+3}\quad\Rightarrow\quad y<x\tag{1.3}$$

(1.1), (1.2) et (1.3) donnent $x<y<z<x$. Ce qui est absurde car on ne peut pas avoir $x<x$
D'où on ne peut pas avoir $x<3$

**12.1.3.** Montrons que si $(x,y,z)$ est solution du système on ne peut pas avoir $x>3$
Si $x>3$ alors

$$\begin{aligned}&\sqrt{2x+3}>\sqrt{2\times 3+3}\\\Rightarrow\quad& z>3\\\Rightarrow\quad&\sqrt{2z+3}>\sqrt{2\times 3+3}\\\Rightarrow\quad& y>3\end{aligned}$$

Donc si $x>3$ alors on a aussi $y>3$ et $z>3$
Or nous avons obtenu précédemment que si $x>3$ alors $f(x)>0$
Donc comme $x>3$, $y>3$, $z>3$ on a : $f(x)>0$, $f(y)>0$ et $f(z)>0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow x^2>2x+3\,,\ y^2>2y+3\,,\ z^2>2z+3\\&\Rightarrow x>\sqrt{2x+3}\,,\ y>\sqrt{2y+3}\,,\ z>\sqrt{2z+3}\\&\Rightarrow x>z\,,\ y>x \text{ et } z>y\end{aligned}$$

Ce qui est impossible
D'où on ne peut pas avoir $x>3$

**12.1.4.** Solution du système
Nous avons obtenu aux équations précédentes que si $(x,y,z)$ est solution du système alors on ne peut ni avoir $x<3$, ni $x>3$
Donc le seul cas possible qui reste est $x=3$
Et pour $x=3$ on obtient $y=z=3$
Ainsi la seule solution du système est :(3;3;3)
L'ensemble solution du système est donc

$$S=\{(3;3;3)\}$$

## 12.2. Série *E*

**12.2.1.** Montrons que si le triplet $(x,y,z)$ est solution du système, alors $x$, $y$ et $z$ sont solutions de $t^8-12t^6+30t^4+36t^2-128t-183=0$

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{2y+3}\\&\Rightarrow x^2-3=2y\\&\Rightarrow(x^2-3)^2=4y^2\end{aligned}$$

Or $y=\sqrt{2z+3}\Rightarrow y^2=2z+3$.
D'où

$$\begin{aligned}&(x^2-3)^2=4(2z+3)=8z+12\\&\Rightarrow(x^2-3)^2-12=8z\\&\Rightarrow\left[(x^2-3)^2-12\right]^2=64z^2\end{aligned}$$

Or $z=\sqrt{2x+3}\Rightarrow z^2=2x+3$
D'où

$$\begin{aligned}&\left[(x^2-3)^2-12\right]^2=64(2x+3)\\&\Rightarrow(x^4-6x^2+9-12)^2=128x+192\\&\Rightarrow(x^4-6x^2-3)^2=128x+192\\&\Rightarrow x^8-6x^6-3x^4-6x^6+36x^4+18x^2-\\&\quad 3x^4+18x^2+9=128x+192\\&\Rightarrow x^8-12x^6+30x^4+36x^2-128x-183=0\end{aligned}$$

Ainsi $x$ est solution de l'équation

$$t^8-12t^6+30t^4+36t^2-128t-183=0$$

Étant donné que $x$, $y$ et $z$ sont permutables dans le système initiale alors $y$ et $z$ sont aussi solutions de cette équation.

**12.2.2.** Déduisons en les valeurs rationnelles de $x$, $y$ et $z$.
Comme $x$, $y$ et $z$ sont les racines de nombres, alors $x\geq 0$, $y\geq 0$ et $z\geq 0$
En plus $x$, $y$ et $z$ sont les solution de l'équation établie à la question précédente.
Nous allons résoudre cette équation.
Posons

$$p(t)=t^8-12t^6+30t^4+36t^2-128t-183$$

On constate que $p(3)=p(-1)=0$
Donc $-1$ et 3 sont racines du polynôme $p$.
D'où il existe un polynôme $q$ tel que

$$p(t)=(t-3)(t+1)q(t)=(t^2-2t-3)q(t)$$

Nous allons déterminer $q$ en faisant une division euclidienne

$$\left(t^8-12t^6+30t^4+36t^2-128t-183\right)\div\left(t^2-2t-3\right)=t^6+2t^5-5t^4-4t^3+7t^2+2t+61$$

$$\begin{array}{l}
t^8 \quad -12t^6 \quad +30t^4 \quad +36t^2 \quad -128t \quad -183\\
-t^8+2t^7+3t^6\\
\hline
2t^7 \quad -9t^6\\
-2t^7 \quad +4t^6 \quad +6t^5\\
\hline
-5t^6 \quad +6t^5+30t^4\\
5t^6-10t^5-15t^4\\
\hline
-4t^5+15t^4\\
4t^5 \quad -8t^4-12t^3\\
\hline
7t^4-12t^3+36t^2\\
-7t^4+14t^3+21t^2\\
\hline
2t^3+57t^2-128t\\
-2t^3 \quad +4t^2 \quad +6t\\
\hline
61t^2-122t-183\\
-61t^2+122t+183\\
\hline
0
\end{array}$$

D'où

$$q(t)=t^6+2t^5-5t^4-4t^3+7t^2+2t+61$$

Donc $p(t)=0 \Leftrightarrow t=3$ ou $t=-1$ ou $q(t)=0$
Comme $x,y,z\geq 0$ alors $t=3$ ou $q(t)=0$
Il ne nous reste qu'à résoudre $q(t)=0$, pour $t\geq 0$

$$\begin{aligned}
q(t)&=\left(t^6-5t^4+7t^2\right)+\left(2t^5-4t^3+2t\right)+61\\
&=t^2\left(t^4-5t^2+7\right)+t\left(2t^4-4t^2+1\right)+61\\
&=t^2\left[\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+2t\left(t^2-1\right)\\
&\quad+61\geq 61\,;\,\forall t\geq 0
\end{aligned}$$

Donc $\forall t\geq 0$, $q(t)\geq 61>0$
Par conséquent l'équation $q(t)=0$ n'admet aucune solution positive.
La seule solution positive de $p(t)=0$ est donc 3.
Ainsi $x=y=z=3$.

## Solution 13. (p. 5)

**13.1.** Complétons les phrases
**13.1.1.** Toute suite croissante et majorée est *convergente.*
**13.1.2.** Toute suite décroissante et *minorée* est convergente.
**13.2.** La proposition « deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite »est *vraie*
*Démonstration* : Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites adjacentes telles que $(u_n)$ soit croissante et $(v_n)$ décroissante.
Alors $u_n\leq v_n$
Or comme $(u_n)$ est croissante : $\forall n; u_0\leq u_n$
Et comme $(v_n)$ est décroissante : $\forall n; v_n\leq v_0$
D'où on a $u_0\leq u_n\leq v_n\leq v_0$
Donc $(u_n)$ est croissante (*par hypothèse*) et majorée par $v_0$. Donc converge.
Et $(v_n)$ est décroissante et minorée par $u_0$.
Donc converge
De plus $(u_n)$ et $(v_n)$ étant adjacentes $\lim(u_n-v_n)=0$
$\Rightarrow \lim u_n=\lim v_n$
D'où $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes et ont la même limite.
**13.3.** La bonne réponse est b). En effet la fonction étant strictement croissante sa dérivée est strictement positive.

## Solution 14. (p. 6)

**14.1.** Déterminons la condition sur $\lambda$ pour que $f_\lambda$ soit automorphisme.
$f_\lambda$ est un automorphisme si et seulement si $\det M_\lambda\neq 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-1+\lambda & 1+\lambda\\ \lambda(1-\lambda) & \lambda\end{vmatrix}\neq 0\\
&\Leftrightarrow\lambda(-1+\lambda)-\lambda(1-\lambda)(1+\lambda)\neq 0\\
&\Leftrightarrow-\lambda(1-\lambda)-\lambda(1-\lambda)(1+\lambda)\neq 0\\
&\Leftrightarrow-\lambda(1-\lambda)(\lambda+2)\neq 0\\
&\Leftrightarrow\lambda\neq 0 \text{ et } \lambda\neq 1 \text{ et } \lambda\neq -2
\end{aligned}$$

**14.2.** **14.2.1.** Déterminons la loi de la probabilité de $X$
Les seules valeurs que peut prendre $X$ sont $-2$ ; 1 et 3
Donc $X(\Omega)=\{-2;1;3\}$

- Probabilité de $X=-2$
  $X=-2$ si et seulement si les boules tirées sont $p$ et $q$ telles que ni $f_p$, ni $f_q$ ne soit un automorphisme $\Leftrightarrow p\in\{0;1;-2\}$ et $q\in\{0;1;-2\}$
  Il suffit de tirer l'une de ces 3 valeurs de $p$ (*parmi les* 5 *boules*) puis, comme les tirages sont successifs et sans remise, l'une des deux autres valeurs de $q$ parmi les 4.
  D'où $p(X=-2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{10}$
- Probabilité de $X=1$
  $X=1$ si et seulement si :
  (i) Soit $f_p$ est un automorphisme et $f_q$ n'est pas un automorphisme (donc $p\in\{-1;2\}$ et $q\in\{0;1;-2\}$).
  (ii) Soit $f_p$ n'est pas un automorphisme et $f_q$ est un automorphisme $p\in\{0;1;-2\}$ et $q\in\{-1;2\}$
  D'où $p(X=1)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{5}$

- Probabilité de $X=3$
  $X=3$ si et seulement si $f_p$ et $f_q$ sont des automorphisme. Donc $p\in\{-1;2\}$ et $q\in\{-1;2\}$.

Il suffit donc de choisir l'une de ces valeurs pour $p$ parmi les 5 numéros, puis l'autre valeur pour $q$ parmi les 4 numéros restants.

Donc $(X=3)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$. D'où

| $i$ | $-2$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $p(X=i)$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |

**14.2.2.** Calculons l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de $X$.

On a le tableau suivant

| $i$ | $-2$ | $1$ | $3$ | Total |
|---|---|---|---|---|
| $p(X=i)$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | |
| $iP(X=i)$ | $\frac{-6}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}=0.3$ |
| $i^2P(X=i)$ | $\frac{12}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{27}{10}=2.7$ |

$E(X)=\sum iP(X=i)=0.3$

$$\begin{aligned}\sigma(X)&=\sqrt{V(X)}\\&=\sqrt{\sum i^2P(X=i)-\left(E(X)\right)^2}\\&=\sqrt{2.7-0.3^2}\\&=\sqrt{2.61}\end{aligned}$$

**14.3.** Déterminons une équation cartésienne du noyau $\operatorname{Ker} f_{-2}$ et de l'image $\operatorname{Im} f_{-2}$ de $f_{(-2)}$

$M_{-2}=\begin{pmatrix}-1-2 & 1-2\\ -2(1+2) & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -6 & -2\end{pmatrix}$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $f(\vec{u})=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-3x-y\\ y'=-6x-2y\end{cases}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker} f_{-2}\Leftrightarrow f_{-2}(\vec{u})=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3x-y=0\\ -6x-2y=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow -3x-y=0$$
$$\Leftrightarrow 3x+y=0$$

D'où $\operatorname{Ker} f_{-2}$ a pour équation cartésienne $3x+y=0\to\operatorname{Im} f_{-2}$.

On a $\begin{cases}x'=-3x-y\\ y'=-6x-2y=2(-3x-y)=2x'\end{cases}$

D'où une équation cartésienne de $\operatorname{Im} f_{-2}$ est $y'=2x'$.
Soit encore $y=2x$.

**14.4.** Vérifions si $g$ appartient à $L(R^2)$.

La matrice de $g$ est $M_g=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Nous allons chercher $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $M_g=M_\lambda$

$$M_g=M_\lambda\Leftrightarrow\begin{cases}-1+\lambda=\frac{-1}{2}\\ 1+\lambda=\frac{3}{2}\\ \lambda(1-\lambda)=\frac{1}{4}\\ \lambda=\frac{1}{2}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

D'où $M_g=M_{1/2}$
Ainsi $g$ appartient à $L(R^2)$

## Solution 15. (p. 6)

### Partie A

(E) : $z^3+64i=0$

**15.1.** Déterminons une solution $z_0$ de (E) telle que $\overline{z_0}=-z_0$

$z_0$ solution de (E) $\Leftrightarrow z_0^3+64i=0$

Posons $z_0=a+ib\ (a,b\in\mathbb{R})$

$\overline{z_0}=-z_0\Leftrightarrow a-ib=-a-ib\Leftrightarrow a=0$ d'où $z_0=ib(b\in\mathbb{R})$

Or $z_0^3+64i=0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow(ib)^3+64i=0,\ b\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow i^3\times b^3+64i=0,\ b\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow -ib^3+64i=0\\&\Rightarrow b^3=64\\&\Rightarrow b=\sqrt[3]{64}\\&\Rightarrow b=4\end{aligned}$$

d'où $z_0=4i$

**15.2.** Déterminons les autres solutions $z_1$ et $z_2$ de (E).
Nous allons utiliser la division euclidienne.

$$\left(z^3+64i\right)\div(z-4i)=z^2+4iz+16i^2+\frac{(64i^3+64i)}{z-4i}$$

$$\begin{array}{rrrr} z^3 & & & +64i\\ -z^3 & +4iz^2 & & \\ \hline & 4iz^2 & & \\ & -4iz^2 & +16i^2z & \\ \hline & & 16i^2z & +64i\\ & & -16i^2z & +64i^3\\ \hline & & & (64i^3+64i)\end{array}$$

D'où
$$\left(z^3+64\mathrm{i}\right)=(z-4\mathrm{i})\left(z^2+4\mathrm{i}z-16\right)$$
Donc $z^3+64\mathrm{i}=0$
$\Leftrightarrow (z-4\mathrm{i})\left(z^2+4\mathrm{i}z-16\right)=0$
$\Leftrightarrow z=4\mathrm{i}$ ou $z^2+4iz-16=0$
Résolvons $z^2+4\mathrm{i}z-16=0$
$\Delta=(4\mathrm{i})^2+64=-16+64=48=4^2\times 3$
d'où
$z=\dfrac{-4\mathrm{i}-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$ ou $z=2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$
Les autres solutions (en plus de 4i) sont donc $z_1=-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$ et $z_2=2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$

**15.3.** Déterminons la nature du triangle $ABC$
$AC=\left|z_C-z_A\right|=\left|2\sqrt{3}+6\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+6^2}=\sqrt{48}$
Donc $AC=BC=4\sqrt{3}$
$AB=\left|2\sqrt{3}-2\mathrm{i}-\left(-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}\right)\right|=4\sqrt{3}=AC$
Ainsi $AB=AC=BC=4\sqrt{3}$
Le triangle $ABC$ est donc un triangle équilatéral.
Montrons que les points $A$, $B$ et $C$ appartiennent à une conique dont nous préciserons la nature et les éléments caractéristiques.
On sait qu'une conique de foyer le point $F$, de directrice la droite $(D)$ et d'excentricité le réel $e>0$ est l'ensemble des points $M$ du plan tel que $\dfrac{MF}{d(M,(D))}=e$
Il suffit donc de chercher $F$, $(D)$ et $e$ tels que
$$\frac{AF}{d(A,(D))}=\frac{BF}{d(B,(D))}=\frac{CF}{d(C,(D))}=e$$
Soit $G$ le centre de gravité de $ABC$ et $A'$ le milieu de $[BC]$
Comme $ABC$ est un triangle équilatéral, $AG=BG=CG=\dfrac{2}{3}AA'$
Posons $(D)$ la médiatrice de $\left[AA'\right]$ alors $d\left(A,(D)\right)=d\left(B,(D)\right)=d\left(C,(D)\right)=\dfrac{1}{2}AA'$
Donc $\dfrac{AG}{d\left(A,(D)\right)}=\dfrac{BG}{d\left(B,(D)\right)}=\dfrac{CG}{d\left(C,(D)\right)}=\dfrac{\frac{2}{3}AA'}{\frac{1}{2}AA'}=\dfrac{4}{3}>1$
Donc $A$, $B$ et $C$ appartiennent à l'hyperbole de foyer $G$ (center de gravité de $ABC$), de directrice la médiatrice de $\left[AA'\right]$ (où $A'$ est le milieu de $[BC]$) et d'excentricité $e=\dfrac{4}{3}$.
*NB* : on peut trouver plusieurs coniques auxquelles $A$, $B$ et $C$ appartiennent.

**15.4.** Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $f$.
Comme $f(A)=B$, $z_B-4\mathrm{i}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(z_A-4\mathrm{i}\right)$
$\Rightarrow 2\sqrt{3}-2\mathrm{i}-4\mathrm{i}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}-4\mathrm{i}\right)$
$\Rightarrow r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}-6\mathrm{i}}{-2\sqrt{3}-6\mathrm{i}}=\dfrac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{-\sqrt{3}-3\mathrm{i}}$
$=\dfrac{\left(\sqrt{3}-3\mathrm{i}\right)\left(-\sqrt{3}+3\mathrm{i}\right)}{\left(-\sqrt{3}-3\mathrm{i}\right)\left(-\sqrt{3}+3\mathrm{i}\right)}=\dfrac{-3+3\mathrm{i}\sqrt{3}+3\mathrm{i}\sqrt{3}+9}{3+9}$
$=\dfrac{6+6\mathrm{i}\sqrt{3}}{12}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
D'où $r=1$ et $\theta=\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$
Ainsi $f$ est la rotation de centre $C$ (4i) et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

**Partie B**

**15.1.** Démontrons que $\mathscr{A}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-y)$
$\mathscr{A}=\text{aire}(GENH)-\text{aire}(FHG)+\text{aire}(DGE)$
or
$$\begin{aligned}\text{aire}(GENH)&=\text{aire}(GHPN')\\&=\text{aire}(GN'ME)=\frac{\text{aire}(PMN)}{3}\end{aligned}$$
où $N'$ est le projeté orthogonal de $N$ sur $(PM)$ d'où
$$\begin{aligned}\text{aire}(GENH)&=\frac{MN\times PE}{2\times 3}\\&=\frac{MN\times\sqrt{PM^2-EM^2}}{2\times 3}\\&=\frac{2\times\sqrt{2^2-1^2}}{2\times 3}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$
Car $PE=MH=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
$$\begin{aligned}\text{aire}(FHG)&=\frac{FH\times GH}{2}\quad\text{car }(GH)\perp(FH)\\&=\frac{FH\times\frac{1}{3}MH}{2}\\&=\frac{1}{6}FH\times MH\\&=\frac{1}{6}\times x\times\sqrt{3}\\&=\frac{\sqrt{3}}{6}x\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\text{aire}(DGE)&=\frac{DE\times GE}{2}\quad\text{car }(DE)\perp(GE)\\&=\frac{\sqrt{3}}{6}y\end{aligned}$$
D'où
$$\mathscr{A}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{\sqrt{3}}{6}y=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}(x-y)$$

**15.2.** Démontrons que $y=\dfrac{3x-1}{3(x+1)}$
Posons $\alpha=\text{mes}\,\widehat{HGF}$ et $\beta=\text{mes}\,\widehat{DGE}$
$$\text{mes}\,\widehat{DGE}+\text{mes}\,\widehat{EGF}=\text{mes}\,\widehat{DGF}=\frac{\pi}{2}\qquad(1.1)$$
Et
$$\text{mes}\,\widehat{EGF}+\text{mes}\,\widehat{FGH}=\text{mes}\,\widehat{EGH}=\frac{2\pi}{3}\qquad(1.2)$$
$$\begin{aligned}(1.2)\text{-}(1.1)\ \Rightarrow\alpha-\beta&=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}\\\Rightarrow\alpha&=\beta+\frac{\pi}{6}\qquad(1.3)\end{aligned}$$
Comme $PMN$ est un triangle équilatéral, en calculant,

1

on obtient $GE = GH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Or $\tan\alpha = \dfrac{x}{GH}$ et $\tan\beta = \dfrac{y}{GE}$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{3}x \tag{1.4}$$

$$\text{et } \tan\beta = \sqrt{3}y \tag{1.5}$$

Nous allons établir une relation entre $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en utilisant (1.3)

D'après (1.3) $\alpha = \beta + \dfrac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tan\alpha &= \tan\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)}\\
&= \frac{\sin\beta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\beta\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\beta\cos\frac{\pi}{6}-\sin\beta\sin\frac{\pi}{6}}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta+\frac{1}{2}\cos\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta-\frac{1}{2}\sin\beta}\\
&= \frac{\sqrt{3}\sin\beta+\cos\beta}{\sqrt{3}\cos\beta-\sin\beta}\\
&= \frac{\sqrt{3}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+1}{\sqrt{3}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}\\
&= \frac{\sqrt{3}\tan\beta+1}{\sqrt{3}-\tan\beta} \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

(1.4) et (1.5) dans (1.6) donne

$$\sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}y+1}{\sqrt{3}-\sqrt{3}y} = \frac{3y+1}{\sqrt{3}(1-y)}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 3x(1-y) = 3y+1\\
&\Rightarrow -3xy-3y = -3x+1\\
&\Rightarrow 3(x+1)y = 3x+1\\
&\Rightarrow y = \frac{3x+1}{3(x+1)}
\end{aligned}$$

**15.3.** Déduisons la valeur maximale de $\mathscr{A}$

D'après les questions précédentes

$\mathscr{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-y)$ et $y = \dfrac{3x-1}{3(x+1)}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathscr{A} &= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\left[x-\frac{3x-1}{3(x+1)}\right]\\
&= \frac{\sqrt{3}}{3(x+1)}\left[(x+1) - \frac{1}{6}\left[3x(x+1)-(3x-1)\right]\right]\\
&= \frac{\sqrt{3}}{3(x+1)}\left[\frac{6x+6-\left(3x^2+3x-3x+1\right)}{6}\right]\\
&= \frac{\sqrt{3}}{18(x+1)}\left(-3x^2+6x+5\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{18}\times\frac{-3x^2+6x+5}{x+1}
\end{aligned}$$

Étant donné que $PN = 2$, alors $HN = 1$

D'où $x \in [0;1]$ car $x \leq HN$

Nous allons donc étudier le maximum de la fonction $f$ définie sur $D$ :[0; 1] par $f(x) = \dfrac{-3x^2+6x+5}{x+1}$

$f$ est continue et dérivable sur $D$ et $\forall x \in D$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(-3x^2+6x+5\right)'(x+1)-(x+1)'\left(-3x^2+6x+5\right)}{(x+1)^2}\\
&= \frac{(-6x+6)(x+1)-\left(-3x^2+6x+5\right)}{(x+1)^2}\\
&= \frac{-6(x-1)(x+1)+3x^2-6x-5}{(x+1)^2}\\
&= \frac{-6\left(x^2-1\right)+3x^2-6x-5}{(x+1)^2}\\
&= \frac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}\\
&= \frac{-3\left(x+1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

or $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{\left(x+1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}{(x+1)^2} > 0$. Donc $f'(x)$ est de signe opposé à celui de $x+1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\text{or } x+1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\begin{cases} >0 & \text{si } x \in \left]-1+\frac{2\sqrt{3}}{3};1\right]\\ <0 & \text{si } x \in \left[0;-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[\\ =0 & \text{si } x = -1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ est}\begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \in \left[0;-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]\\ \leq 0 & \text{si } x \in \left[-1+\frac{2\sqrt{3}}{3};1\right]\end{cases}$$

Ainsi $f$ est croissante sur $\left[0;-1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ et est décroissante sur $\left[-1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3};1\right]$

$f$ étant continue en plus, alors $f$ admet en $x_0 = -1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ un maximum.

La valeur maximal de $\mathscr{A}$ est donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_m &= \frac{\sqrt{3}}{18}\times f(x_0)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{18}\times\frac{-3\left(-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+6\left(-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+5}{-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}+1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18} \times \frac{-3\left(1+\frac{4}{3}-\frac{4\sqrt{4}}{3}\right)-6+4\sqrt{3}+5}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{1}{12}\left(-3-4+4\sqrt{3}-6+4\sqrt{3}+5\right)$$

$$= \frac{8\sqrt{3}-8}{12}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}$$

**15.4.** Déterminons le système d'équation cartésienne de la perpendiculaire au triangle $MNP$ en son centre de gravité.

Déterminons d'abord les coordonnées de $G$

$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}; \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

$\Rightarrow G\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}; \frac{4}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

$\vec{n} = \vec{MN} \wedge \vec{MP}$ est un vecteur normal au plan $MNP$

or $\overrightarrow{MN}\left(\sqrt{3};-1;0\right)$ et $\overrightarrow{MP}\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-1;\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

d'où

$$\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{MP}\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & \frac{2\sqrt{6}}{3}\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & \sqrt{3}\\ \frac{2\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}\sqrt{3} & -1\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -1\end{vmatrix}\right)$$

soit $\vec{n}\left(\frac{-2\sqrt{6}}{3};-2\sqrt{2};\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$

$(D)$ est donc la droite passant par $G$ et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur.

Soit $M(x,y,z)$; alors

$$\overrightarrow{GM}\left(x-\frac{4\sqrt{3}}{9}; y-\frac{4}{3}; z-\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$$

$M \in (D) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{GM} = \alpha\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{4\sqrt{3}}{9} & = -\frac{2\sqrt{6}}{3}\alpha \quad (1)\\ y-\frac{4}{3} & = -2\sqrt{2}\alpha \quad (2)\\ z-\frac{2\sqrt{6}}{9} & = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha \quad (3)\end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \alpha = \frac{y-\frac{4}{3}}{-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}y$

D'où

$$x-\frac{4\sqrt{3}}{9} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}y\right)$$
$$= -\frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3}y$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\sqrt{3}}{3}y = 0$$

et

$$z-\frac{2\sqrt{6}}{9} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}y\right)$$
$$= -\frac{2\sqrt{6}}{9} + \frac{2\sqrt{6}}{12}y$$

$$\Leftrightarrow z - \frac{\sqrt{6}}{6}y = 0$$

D'où le système d'équation $(D)$ : $\begin{cases} x-\frac{\sqrt{3}}{3}y & = 0\\ z-\frac{\sqrt{6}}{6}y & = 0\end{cases}$

**Partie C**

$f(x) = \mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}$, $g(x) = \ln f(x)$

Montrons que $g$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

$$g(x) = \ln f(x) = \ln \mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x} = 2\mathrm{e}^x$$

car $\ln \mathrm{e}^a = a$.

Donc $g'(x) = 2\mathrm{e}^x = g(x)$.

D'où $g$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ (*qui est une équation différentielle du premier ordre*).

## 1.2.5 Solution – Baccalauréat 2016

### Solution 16. (p. 7)

**16.1.** Déterminons le nombre $N$ de nombres complexes qu'on peut ainsi construire.

Il s'agit de déterminer le nombre de couple $S(x,y)$ qu'on peut former en tirant successivement et avec remise 2 nombres parmi les 5 données.

Donc $N = 5^2 = 25$

**16.2.** Déterminons la probabilité d'obtenir :

**16.2.1.** Un nombre complexe de module $\sqrt{2}$

Soit $P_1$ cette probabilité

$$P_1 = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Si nous posons $n_1$ le nombre de cas favorables alors $h = \frac{n_1}{N}$

Les valeurs possible de $(x,y)$ où le nombre complexe a pour module $\sqrt{2}$ sont : $(-\sqrt{2},0)$, $(-1,1)$, $(0,-\sqrt{2})$, $(0,\sqrt{2})$, $(1,-1)$, $(\sqrt{2},0)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$

Soit donc 8 cas favorables.

D'où $n_1 = 6$ et $P_1 = \frac{8}{25}$

**16.2.2.** Un nombre complexe dont un argument et $\frac{\pi}{2}$

Posons $P_2$ cette probabilité et $n_2$ sur nombre de cas favorables $P_2 = \frac{n_2}{N}$.

Les valeurs possibles de $(x,y)$ où le nombre $z = x + iy$ admet $\frac{\pi}{2}$ comme un argument sont : $(0,1)$ et $(0,\sqrt{2})$.

En effet $z = x + \mathrm{i}y$ admet $\frac{\pi}{2}$ comme argument signifie que $z = re^{i\frac{\pi}{2}}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow z = ri(r > 0) \Rightarrow x = 0 \text{ et } y > 0$$

On a donc $n_2 = 2$ cas favorables.

D'où $P_2 = \dfrac{n_2}{N} = \dfrac{2}{25}$

**16.3.** On soit que, lorsqu'on repère $n$ fois une épreuve à 2 éventualités (succès et échec) dont la probabilité de succès est $p$, et qu'on note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus, alors $X$ suit une loi binomiale de paramètre $n$ et $P$. Et dans ce cas $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, on a :

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Pour notre cas, $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{8}{25}$ (comme obtenu à la question **16.2.1.**)

Donc $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$ on a

$$p(X = k) = C_3^k \left(\frac{8}{25}\right)^k \times \left(\frac{17}{25}\right)^{3-k}$$

D'où le tableau suivant :

| $k$ | $P(X = k)$ |
|---|---|
| 0 | $\dfrac{17^3}{25^3} = \dfrac{4913}{15625}$ |
| 1 | $\dfrac{3 \times 8 \times 17^2}{25^3} = \dfrac{6936}{15625}$ |
| 2 | $\dfrac{3 \times 8^2 \times 17}{25^3} = \dfrac{3264}{15625}$ |
| 3 | $\dfrac{8^3}{25^3} = \dfrac{512}{15625}$ |

## Solution 17. (p. 7)

$$(S) : z = (x-y)^2 \qquad (S') : z = xy$$

**17.1. 17.1.1.** Déterminons le vecteur $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} \wedge (2\vec{k})$

On soit que $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$

Donc $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} \wedge (2\vec{k}) = \vec{k} \wedge (2\vec{k}) = 2(\vec{k} \wedge \vec{k}) = \vec{0}$

**17.1.2.** Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $(I_2)$

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace

$$M \in (I_2) \Leftrightarrow M \in (S') \text{ et } M \in (P_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = xy \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M \in (OJ) \text{ ou } M \in (OI)$$

$$\Leftrightarrow M \in (OI) \cup (OJ)$$

D'où $(I_2) = (OI) \cup (OJ)$

$(I_2)$ est donc la réunion de l'axe des abscisses $(OI)$ et des ordonnées $(OJ)$.

**17.1.3.** Déterminons la nature et les éléments caractéristiques du projeté orthogonal de $(I_3)$ sur le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace

$$M \in (I_3) \Leftrightarrow M \in (S) \text{ et } M \in (S'')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = (x-y)^2 \\ z = -2xy + 4 + 2y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = -2xy + 4 + 2y^2 \\ z = (x-y)^2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Soit $M'(x', y', z')$ un point de l'espace $M'$ est le projeté de $M$ sur $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ signifie que

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 0 \end{cases}$$

D'où (**16.2.1.**) $\Rightarrow (x'-y')^2 = -2x'y' + 4 + 2y'^2$ et $z' = 0$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 - 2xy =$$

$$= -2x'y' + 4 + 2y'^2 \text{ et } z' = 0$$

$$\Rightarrow x'^2 - y'^2 = 4 \text{ et } z' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} = 1 \text{ et } z' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{2^2} = 1 \text{ et } z' = 0$$

Donc

Le projeté orthogonal de $(I_3)$ sur $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet donc pour equation cartésienne dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{2^2} = 1$

Oui est de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = 2$ et $b = 2$.

Il s'agit de l'hyperbole dont les éléments caractéristiques sont :

- Centre $O$
- Sommets $A(2; 0)$ et $A'(-2; 0)$ (car $a = 2$)
- Axe focal $(O, \vec{\imath})$
- Asymptotes : $(\Delta) : y = \dfrac{b}{a}x$ et $(\Delta') : -\dfrac{b}{a}x$

$$\Rightarrow \Delta : y = x \text{ et } \Delta' : y = -x$$

- Excentricité : $e = \dfrac{c}{a}$

$$\text{avec } c^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$e = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

- Foyers : $F(2\sqrt{2}; 0)$ et $F'(-2\sqrt{2}; 0)$ car $c = 2\sqrt{2}$

**17.2.** *(Série C uniquement)*

$$(I_4) = (S) \cap (S')$$

**17.2.1.** Montrons que si $x = 0$, alors le point $M$ est le point $O$

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace

$M \in (I_4) \Leftrightarrow M \in (S)$ et et $M \in (S')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = (x-y)^2 & (1.2) \\ z = xy & (1.3) \end{cases}$$

Montrons que si $x=0$ alors $M=O$ c.a.d $x=y=z=0$
Supposons donc que $x=0$, alors

$$(1.3) \Rightarrow z = 0 \times y = 0$$

et $(1.2) \Rightarrow 0=(0-y)^2 \Leftrightarrow 0=y^2 \Leftrightarrow y=0$
D'où $x=y=z=0$
Donc si $x=0$ alors $M=O$.

**17.2.2. 17.2.2.1.** Montrons que les entiers $x$ et $y$ vérifient $x^2-3xy+y^2=0$

$$M(x,y,z)\in(I_4) \Leftrightarrow \begin{cases} z=(x-y)^2 \\ z=xy \end{cases}$$
$$\Rightarrow xy=(x-y)^2$$
$$\Rightarrow xy = x^2-2xy+y^2$$
$$\Rightarrow 0=x^2-3xy+y^2$$
$$\Rightarrow x^2-3xy+y^2=0 \qquad (1.4)$$

Déduisons alors qu'il existe des entiers naturels $x'$ et $y'$ premiers entre eux tels que

$$x'^2-3x'y'+y'^2=0$$

Comme $x\neq 0$ alors d'après la relation précédente $y\neq 0$
Donc en posant $\delta = PGCD(x,y)$, il existe $x'$ et $y'$ tels que $x=\delta x'$ et $y=\delta y'$. Avec $PGCD(x',y')=1$

En plus (1.4)

$$\Rightarrow (\delta x')^2-3(\delta x)(\delta y)+(\delta y')^2=0$$
$$\Rightarrow \delta^2x'^2-3\delta^2x'y'+\delta^2y'^2=0$$
$$\Rightarrow \delta x'^2-3x'y'+y'^2=0 \text{ car } \delta\neq 0$$

Donc il existe deux entiers naturels $x'$ et $y'$ premiers entre eux tels que $x'^2-3x'y'+y'^2=0$ avec $x'=\dfrac{x}{\delta}$, $y'=\dfrac{y}{\delta}$ et $\delta=PGCD(x,y)$

**17.2.2.2.** Montrons que $x'$ divise $y'^2$

$$x'^2-3x'y'+y'^2=0$$
$$\Rightarrow x'^2-3x'y'=-y'^2$$
$$\Rightarrow x'(x'-3y')=-y'^2$$

Or $x'$ et $y'$ sont premiers entre eux, donc $x'-3y'$ et $y'$ sont premiers entre eux

$$\Rightarrow x'|y'^2$$

Donc $x'$ divise $y'^2$
Montrons que $x'$ divise $y'$

$$x' \text{ divise } y'^2 \Rightarrow x' \text{ divise } y'\times y'$$
$$\Rightarrow x' \text{ divise } y'$$

**17.2.2.3.** Établissons que $x=0$
D'après les questions précédentes, il existe $x'$ et $y'$ premiers entre eux tels que

$$x'^2-3x'y'+y'^2=0 \text{ et } x' \text{ divise } y'$$

$x'$ et $y'$ premiers entre eux signifie que le seul diviseur commun (positif) de $x'$ et $y'$ est 1.
Or $x'$ divise $y'$, $\Rightarrow x'$ est un diviseur commun de $x'$ et $y'$

$$\Rightarrow x'=1$$

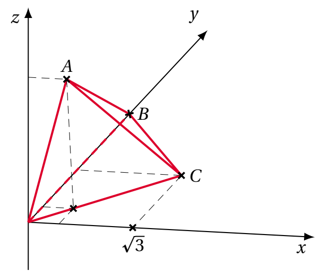
Or si $x'=1$ alors $1^2-3\times1\times y'^2+y'^2=0$

$$\Rightarrow y'^2-3y'^2+1=0$$
$$\Rightarrow y'^2-3\times\frac{3}{2}y'+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=0$$
$$\Rightarrow \left(y'-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0$$
$$\Rightarrow y'=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } y'=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Or aucune de ces valeurs n'est entière.
Donc le cas $x\neq 0$ n'admet aucune solution
D'où $x=0$ et par conséquent $O(0,0,0)$ est le seul point de $(I_4)$ dont les coordonnée sont entières.

**17.3.** *(Série E uniquement)*

**17.3.1. 17.3.1.1.** Figure




**17.3.1.2.** Montrons que les coordonnées des point $A$, $B$ et $C$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont respectivement $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};1;\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $(0,2,0)$, $(\sqrt{3},1,0)$

- Coordonnées de $B$
  Comme $B$ appartient à $(OJ)$, l'axe des ordonnées alors $x_B=z_B=0$
  Aussi comme $OB=2$

$$\text{alors } y_B=2 \text{ ou } y_B=-2$$

  Donc $B(0,2,0)$ ou $B(0,-2,0)$
- Coordonnées de $C$
  $C$ a pour abscisse $\sqrt{3}$ et appartient au plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
  Donc $C(\sqrt{3},y_C,0)$
  Aussi $OC=2$

$$\Rightarrow (\sqrt{3})^2+y_C^2=4$$
$$\Rightarrow y_C^2=1 \Rightarrow y_C=1 \text{ ou } y_C=-1$$

  Donc $C(\sqrt{3};-1;0)$ ou $C(\sqrt{3};1;0)$
  Or nous avons vu précédemment que

$$B(0;2;0) \text{ ou } B(0;-2;0)$$

  Et on soit que $OBC$ est un triangle équilatéral.
  Si $B(0;2;0)$
  Pour $C(\sqrt{3};-1;0)$

$$\text{on a } BC^2=(\sqrt{3})^2+3^2\neq 2^2,$$

  ce cas n'est donc pas correct.
  Pour $C(\sqrt{3};1;0)$

$$\text{on a } BC^2=(\sqrt{3})^2+(2-1)^2=4$$
$$=OB^2=OC^2$$

Si $B(0;-2;0)$
Donc un a :

$$\text{Soit } B(0;2;0) \text{ et } C(\sqrt{3};1;0)$$

$$\text{Soit } B(0;-2;0) \text{ et } C(\sqrt{3};-1;0)$$

- Coordonnées de $A$

$A$ est le point de coordonnées $(x_A, x_B, x_C)$ tel que $OA^2 = AB^2 = AC^2 = z^2$

1 er cas : si $B(0;2;0)$ et $C(\sqrt{3};1;0)$

$OA^2 = AB^2 = AC^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = 4 & (1.5) \\ x_A^2 + (y_A - 2)^2 + z_A^2 = 4 & (1.6) \\ (x_A - \sqrt{3})^2 + (y_A - 1)^2 = z_A^2 = 4 & (1.7) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1.5)-(1.6) &\Rightarrow y_A^2 - (y_A - 2)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (y_A - y_A + 2) \times (y_A + y_A - 2) = 0 \\ &\Rightarrow 2(2y_A - 2) = 0 \\ &\Rightarrow 2y_A = 2 \Rightarrow y_A = 1 \end{aligned}$$

(1.5) et (1.7) deviennent donc

$$\begin{cases} x_A^2 + z_A^2 = 3 & (1.8) \\ (x_A - \sqrt{3})^2 + z_A^2 = 4 & (1.9) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1.8) - 1.9) &\Rightarrow x_A^2 - (x_A - \sqrt{3})^2 = -1 \\ &\Rightarrow x_A^2 - (x_A^2 + 3 - 2\sqrt{3}x_A) = -1 \\ &\Rightarrow 2\sqrt{3}x_A = 2 \\ &\Rightarrow x_A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1.8) on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} + z_A^2 = 3 \\ &\Rightarrow z_A^2 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \\ &\Rightarrow z_A = \sqrt{4 \times \frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ &\text{ou } z_A = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Donc; dans ce cas, soit $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};1;\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, soit $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};1;\frac{-2\sqrt{6}}{3}\right)$

2 ème cas : si $B(0;-2;0)$ et $C(\sqrt{3};-1;0)$

On a $\begin{cases} OA^2 = 4 \\ AB^2 = 4 \\ AC^2 = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = 4 & (1.10) \\ x_A^2 + (y_A + 2)^2 + z_A^2 = 4 & (1.11) \\ (x - \sqrt{3})^2 + (y_A + 1)^2 + z_A^2 = 4 & (1.12) \end{cases}$$

$(1.10) - (1.11)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y_A^2 - (y_A + 2)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (y_A - y_A - 2)(y_A + y_A + 2) = 0 \\ &\Rightarrow -2(2y_A + 2) = 0 \Rightarrow y_A = -1 \end{aligned}$$

En replaçant dans (1.10) et (1.12) on obtient

$$\begin{cases} x_A^2 + z_A^2 = 3 \\ (x_A - \sqrt{3})^2 + z_A^2 = 4 \end{cases}$$

Que nous avons résolu précédemment et obtenu

$$x_A = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } \left(z_A = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ ou } z_A = -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

Donc soit, pour ce cas on a :

$$\text{soit } A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-1;-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\text{soit } A\left(+\frac{\sqrt{3}}{3};-1;\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

Conclusion :

Soit $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};1;\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $B(0;2;0)$, $C(\sqrt{3};1;0)$

Soit $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};1;-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $B(0;2;0)$, $C(\sqrt{3};1;0)$

Soit $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-1;\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $B(0;-2;0)$, $C(\sqrt{3};-1;0)$

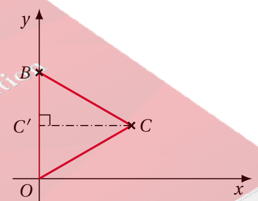
Soit $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-1;-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $B(0;-2;0)$, $C(\sqrt{3};-1;0)$

**17.3.2.** Déduisons le volume du tétraèdre $ABCO$

En considérant $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};1;\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $B(0;2;0)$ et $C(\sqrt{3};1;0)$

On soit que le volume $V$ d'un tétraèdre est donne par la formule $V = \frac{1}{3}Bh$; où $B$ est l'aide de base et $h$ est la hauteur.

Calculons $B$




Comme $OCB$ est un triangle équilatéral, le projeté orthogonal $C'$ de $C$ sur $[OB]$ est le milieu de $[OB]$.

Donc $OB = OC = BC = 2$ et $OC' = \frac{2}{2} = 1$

$$\Rightarrow CC' = \sqrt{OC2 - OC'^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

D'où $B = \frac{OB \times CC'}{2} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Calculons $h$.

Soit $A'$ le projeté orthogonal de $A$ sur $OBC$

Comme le plan $OBC$ est confondue au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors $A'$ est le projeté orthogonal de $A$ sur plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Comme $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};1;\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, alors $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{3};1;0\right)$

Par conséquent $h = AA' = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

D'où $V = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\times 3\sqrt{2}}{3\times 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Donc $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (cm$^2$).

## Solution 18. (p. 7)

$$E = \{M(x,y)/\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1\}$$

### 18.1. Partie A :

$$f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \left(1-\sqrt{|x|}\right)^2$$

**18.1.1. 18.1.1.1.** Parité de $f$

$\forall x \in [-1;1], -x \in [-1;1]$ et

$$f(-x) = \left(1-\sqrt{|-x|}\right)^2 = \left(1-\sqrt{|x|}\right)^2 = f(x)$$

Donc $f$ est paire

**18.1.1.2.** Comme $f$ est paire sa courbe $(C)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**18.1.2. 18.1.2.1.** Vérifions que $g(x) = \left(1-\sqrt{x}\right)^2$ pour tout $x \in [0,1]$

$g$ étant la restriction de $f$ sur $[0,1]$ est égale à $f$ sur $[0,1]$ c.a.d $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) = (1-\sqrt{|x|})^2$

$$\text{Or } \forall x \in [0,1],\ x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$

D'où $g(x) = (1-\sqrt{x})^2$, $\forall x \in [0,1]$

**18.1.2.2.** Étudions la dérivabilité de $g$ à droite en 0.

Pour cela nous allons calculer $\lim\limits_{x\to 0_>} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$. Et, si ce nombre existe et est fini alors $g$ est dérivable à droite en 0

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0_>} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0_>} \frac{(1-\sqrt{x})^2-1^2}{x} \\
&= \lim_{x\to 0_>} \frac{(1-\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x}+1)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0_>} \frac{-\sqrt{x}(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to 0_>} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0_>} \left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) \\
&= 1-\infty = -\infty
\end{aligned}$$

Donc $g$ n'est pas dérivable à droite en 0.

Et comme $\lim\limits_{x\to 0_>} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -\infty$, on peut conclure que la courbe $(C)$ admet à droite en 0, une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

**18.1.2.3.** Montrons que pour tout $x \in ]0;1]$

$$g'(x) = \frac{-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

On soit que $(u^2)' = 2u'u$ $\forall x \in ]0,1]$,

$$g'(x) = \left((1-\sqrt{x})^2\right)' = 2(1-\sqrt{x})'(1-\sqrt{x})$$

Avec $(1-\sqrt{x})' = (-\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ car $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. D'où

$$g'(x) = 2\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1-\sqrt{x}) = \frac{-(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Ainsi pou tout $x \in ]0;1]$ $g'(x) = \frac{-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

**18.1.2.4.** Dressons le tableau de variation de $g$.

Pour cela, nous allons d'abord étudier le signe de $g'(x)$

$\forall x \in ]0;1]$, $g'(x) = \frac{-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Or $\sqrt{x} > 0$ et $\sqrt{x} \leq \sqrt{1}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sqrt{x} > 0 \text{ et } -1+\sqrt{x} \leq 0 \\
&\Rightarrow \frac{-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \leq 0 \\
&\Rightarrow g'(x) \leq 0,\ \forall x \in ]0;1]
\end{aligned}$$

Donc $g$ est décroissante sur $[0;1]$

Aussi

$$g(0) = \left(1-\sqrt{0}\right)^2 = 1$$
$$\text{et } g(1) = \left(1-\sqrt{1}\right)^2 = 0$$

D'où la tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

**18.1.2.5.** Montrons que $t$ est solution de l'équation différentielle $y''-2=0$ sur $[0;1]$

Il suffit de montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $[0;1]$ on a $t''(x)-2=0$

Or $\forall x \in [0;1]$, $t(x) = g(x^2)$

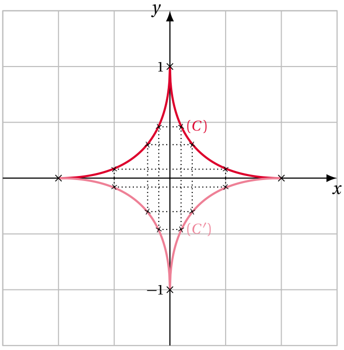
$$\begin{aligned}
&= \left(1-\sqrt{x^2}\right)^2 = (1-|x|)^2 = (1-x)^2 \\
&\Rightarrow t'(x) = 2(1-x)'(1-x) \\
&\qquad = -2(1-x) = 2(x-1) \\
&\Rightarrow t''(x) = 2(x-1)' = 2 \\
&\Rightarrow t''(x)-2 = 0,\ \forall x \in [0;1]
\end{aligned}$$

D'où $t$ est solution de l'équation différentielle $y''-2=0$ sur $[0;1]$

**18.1.3. 18.1.3.1.** Représentons la courbe $(C)$ de la fonction $f$.

Tableau de valeur particulières :

| $x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0,46 | 0,3 | 0,08 | 0 |




NB : Pour représenter $(C)$, on trace d'abord la partie pour $x \in [0;1]$ et puis que $f$ est paire, on déssine la partie pour les $x \in [-1;0]$ faisant le symétrique de l'aire partie par rapport à $(OJ)$.

**18.1.3.2.** Déterminons l'aire $A$ du domaine limité par l'axe des abscisses et la courbe $(C)$ de $f$.

En tenant compte de l'unité sur les axes, 3 cm nu l'axe des abscisses et 3 cm nu l'axe des ordonnées, l'aire $A$ exprimée en cm$^2$ est

$$\begin{aligned}
A &= 3 \times 3 \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \\
&= 9 \times 2 \int_{0}^{1} f(x)\,dx, \text{ car } f \text{ est paire} \\
&= 18 \int_{0}^{1} g(x)\,dx = 18 \int_{0}^{1} \left(1 - \sqrt{x}\right)^2 dx \\
&= 18 \int_{0}^{1} \left(1 + x - 2\sqrt{x}\right) dx \\
&= 18 \left[\frac{1}{2}x^2 + x - 2 \times \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1, \\
&\quad \text{car } \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},\ \forall x \in [0;1] \\
&= 18\left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{4}{3}\right) \\
&= 18 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2}\right) = 18 \times \frac{1}{6} = 3
\end{aligned}$$

Donc $A = 3\,\text{cm}^2$

**18.1.4.** Déduisons de $(C)$ la courbe $(C')$ de $h$.

Comme $h(x) = -f(x)$, $\forall x \in [-1;1]$, alors $(C')$ est le symétrique de $(C)$ par rapport à l'axe des abscisses $(OI)$.

Voir la figure précédente pour le trace de $(C')$.

**18.1.5.** $(u_n) : u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

**18.1.5.1.** Vérifions que la suite $(u_n)$ est bien définie

Il s'agit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ le terme, un (ainsi défini) existe.

Pour cela nous allons montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et appartient à l'intervalle $[0;1]$.

- Pour $n = 0$, $u_0$ existe et $u_0 \in [0;1]$
- Supposons que $u_n$ existe et appartient à $[0;1]$ et montrons que $u_{n+1}$ existe aussi et appartient à $[0;1]$

D'après le tableau de variation de $g$, restriction de $f$ sur $[0;1]$, obtenu à la question (**18.1.2.4.**), nous pouvons tires que

$$\forall x \in [0;1],\ g(x) = f(x) \in [0;1]$$

Donc comme $u_n \in [0;1]$, $f(u_n)$ existe et appartient aussi à $[0;1]$ or $f(u_n) = u_{n+1}$

$$\Rightarrow u_{n+1} \text{ existe et appartient à } [0;1]$$

D'où la suite $(u_n)$ est bien définie.

**18.1.5.2.** Montrons que $(u_n)$ n'est ni croissante ni décroissante

$$u_0 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \left(1 - \sqrt{u_0}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&= 1 + \frac{1}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \approx 0{,}08578
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \left(1 - \sqrt{u_1}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}\right)^2 \\
&= \left(1 - \left|1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right|\right)^2 \\
&= \left(1 - \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right)^2 = \left(1 - 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} = 0{,}5
\end{aligned}$$

Donc $u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$

D'où $(u_n)$ n'est ni croissante, ni décroissante.

**18.2. Partie 2 :**

**18.2.1.** Montrons que pour tout point $M(x.y)$ appartenant à $(E)$, on a $-1 \le x \le 1$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}
M \in (E) &\Leftrightarrow \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{|x|} = 1 - \sqrt{|y|} \\
\text{or } \sqrt{|y|} \ge 0 &\Rightarrow -\sqrt{|y|} \le 0 \\
&\Rightarrow 1 - \sqrt{|y|} \le 1 \\
&\text{or } 1 - \sqrt{|y|} = \sqrt{|x|} \\
&\Rightarrow \sqrt{|x|} \le 1 \\
&\Rightarrow |x| \le 1 \\
&\Rightarrow -1 \le x \le 1.
\end{aligned}$$

**18.2.2.** Montrons que $(E)$ est la réunion des courbes $(C)$ et $(C')$

Soit $M(x,y)$ un point du plan

$$\begin{aligned}
M \in (E) &\Leftrightarrow \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{|y|} = 1 - \sqrt{|x|} \Leftrightarrow |y| = \left(1 - \sqrt{|x|}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow y = \left(1 - \sqrt{|x|}\right)^2 \text{ ou } y = -\left(1 - \sqrt{|x|}\right)^2
\end{aligned}$$

Or nous avons obtenu à la question précédente que

$$M(x,y) \in E \Rightarrow x \in [-1;1]$$
$$\Rightarrow y = f(x) \text{ ou } y = -f(x),\ x \in [-1;1]$$
$$\Rightarrow y = f(x) \text{ou } y = h(x),\ x \in [-1;1]$$
$$\Rightarrow M \in (C) \text{ ou } M \in (C')$$
$$\Leftrightarrow M \in (C) \cup (C')$$

D'où $(E)$ est réunion des courbes $(C)$ et $(C')$
**18.2.3.** $I(1;0)$, $J(0;1)$, $K(-1,0)$ et $L(0;-1)$
**18.2.3.1.** Déterminons l'ensemble des couples $(A,B)$ des points de $(E)$ tels que $d(A,B) = 2$.

$$(E) = (C) \cup (C') \text{ d'après } \mathbf{18.2.2.}$$

Et d'après la courbe de $(C)$ et $(C')$, $(E)$ est contenu dans le carré $IJKL$, donc la distance maximale entre deux points $M$ et $N$ de $(E)$ est égale à la diagonale qui est $IK = JL = 2$
Donc les points $A$, $B$ de $(E)$ tels que $AB = 2$ sont tels que $AB$ soit une diagonale du cané $IJKL$.
Les couples de points possibles sont donc $(I;K)$, $(K;I)$, $(J;L)$ et $(L,J)$.
**18.2.3.2.** Montrons que $S(O) = O$
$(E) = (C) \cup (C')$ étant symétrique par rapport à $O$ admet pour centre de gravité le point $O$.
$S$ étant une isométrie laissant $(E)$ globalement invariant $(E)$, alors $S(E) = (E)$.
Or toute isométrie concerne le barycentre donc comme $S(E) = (E)$, l'image par $S$ du centre de gravite de $(E)$ est le centre de gravité de $S(E) = (E)$

$$\Rightarrow S(O) = O$$

car $O$ est le centre de gravité de $(E)$.
**18.2.3.3.** $S$ étant une isométrie laissant au moins un point invariant est :

- soit l'application identique du plan;
- soit une rotation d'angle non nul de centre $O$;
- soit un symétrie orthogonale d'axe passant par $O$.

**18.2.4. 18.2.4.1.** Vérifions que $r$ est et soit une rotation de centre $O$ et d'angle non nul, soit l'application identique du plan.
D'après la question précédente, puisque $r$ laisse globalement invariant $(E)$, $r$ est soit l'application identique du plan, soit une rotation de centre $O$ et d'angle non nul, soit une symétrie orthogonale.
Or une symétrie orthogonale n'est pas un déplacement.
Donc $r$ est soit une rotation de centre $O$ et d'angle non nul, soit l'application identique du plan.
**18.2.4.2.** Déduisons par leurs éléments caractéristiques tous déplacements qui laissent $(E)$ globalement invariant.
Soit $r$ un tel déplacement.
D'après la question précédente, $r$ est soit l'application identique du plan, soit une rotation de centre $O$ et d'angle non nul.
Soit le cas où $r$ est une rotation d'angle non nul et de centre $O$.
Déterminons les valeurs possibles de son angle $\alpha$
Supposons $I' = r(I)$.
Comme $r$ est une isométrie et que $O = r(O)$ alors $OI' = OI = 1$ sont $I$, $J$, $K$ et $L$.
Donc soit $I' = J$, soit $I' = K$ soit $I' = L$ (cas $I' \neq I$ puis que l'angle de la rotation est non nul).

- Si $I' = J$ alors $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$
- Si $I' = K$ alors $\alpha = \pi$
- Si $I' = L$ alors $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$

Conclusion :
Les déplacements qui laissent $(E)$ globalement invariant soit :

- l'application identique du plan;
- la rotation de centre $O$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$;
- la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$;
- la rotation de centre $O$ et d'angle $\pi$.

**18.2.5. 18.2.5.1.** Vérifions que $O$ appartient à $\Delta$.
On soit que $\Delta$ est l'ensemble des points invariants par $S_\Delta$ et puis que $O$ est invariant par tous les éléments de $(J)$ et donc par $S_\Delta$ en particulier, alors $O \in (\Delta)$.
**18.2.5.2.** Déduisons les éléments caractéristiques des réflexions que laissent $(E)$ globalement invariant.
Il s'agit de déterminer les axes $(\Delta)$ de ces réflexions.
Soit $I'$ l'image de $I$ par $S_{(\Delta)}$.
Comme $O = S(O)$ et $I' = S(I)$ alors $OI' = OI = 1$
Donc $I$ appartient au cercle de courbe $O$ et de rayon 1.
Or les seuls points de $(E)$ qui appartiennent à ce cercle sont $I$, $J$, $K$ et $L$.
Donc $S(I) \in \{I, J, K, L\}$ et $O \in \Delta$.

- si $S(I) = I$ alors $\Delta = (OI)$;
- si $S(I) = J$ alors $(\Delta)$ est première bissectrice. $\Delta_1 : y = x$;
- si $S(I) = K$ alors $(\Delta) = (OJ)$;
- si $S(I) = L$ alors $(\Delta)$ est la $2^{\text{ème}}$ bissectrice $\Delta_2 : y = -x$.

Ainsi les réflexions qui laissent $(E)$ globalement invariant sont $S_{(OI)}$, $S_{(OJ)}$, $S_{\Delta_1}$ et $S_{\Delta_2}$ avec $\Delta_1 : y = x$ et $\Delta_2 : y = -x$
**18.2.6.** Écrivons en extension l'ensemble $(\mathscr{J})$
D'après les questions précédentes

$$(\mathscr{J}) = \left\{ Id_E, r\left(0, -\frac{\pi}{2}\right), r\left(0, \frac{\pi}{2}\right), r(0,\pi), S_{(OI)}, S_{(OJ)}, S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2} \right\}$$

où $\Delta_1 : y = x$, $\Delta_2 : y = -x$

## 1.2.6 Solution – Baccalauréat 2017

La solution de ce sujet peut être gratuitement téléchargée sur :

**www.simo.education**

1


J.P. Kengne
E. Simo
Mathématiques
Terminales C, E
Nouvelle Edition
SIMO